

2-14
ДАГЕСТАНСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ
В.И.ЛЕНИНА

УЧЕНЫЕ
ЗАПИСКИ

Том VII

1961



Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. И. ЛЕНИНА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

Том VII

часть I

*Физико-математические и технические
науки*

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1961

Ответственный редактор

М. С. Бежаев

Редакционная коллегия: *Ф. А. Коршак,*
Х. И. Таймуразов, А. З. Эфендиев.

Редактор выпуска

Ф. А. Коршак

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ

том VII

ч. I

201654

Дат. ест. наук гос. ун-та
им. В. И. Ленина
БИБЛИОТЕКА

Редактор *Н. С. Рассказова.*

Технический редактор *В. В. Зенин.* Корректор *Л. В. Фофанова.*

НГ03227 Сдано в набор 22/X 1960 г. Подписано к печати 24.X.61 г.
Формат бумаги 60×92¹/₁₆. Печ. л. 7. Учетно-изд. л. 6,75.
Цена 47 коп. Тираж 500. Заказ 1345.

Издательство Саратовского университета, Астраханская, 83.
Типография издательства «Коммунист», проспект Ленина, 94.

П. Н. КНЯЗЕВ

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ
САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ
ПРОСТРАНСТВЕ

Для ограниченных самосопряженных операторов A и B , действующих в гильбертовом пространстве H , можно ввести отношение порядка: мы пишем $A \geq B$, если для любого элемента $x \in H$ справедливо неравенство $(Ax, x) \geq (Bx, x)$. Аналогично вводится понятие неотрицательного оператора: оператор A неотрицателен, $A \geq 0$, если для всех элементов $x \in H$ имеет место неравенство $(Ax, x) \geq 0$. Введенное отношение порядка транзитивно, и, кроме того, из неравенства $A \geq B$ следуют неравенства $A + C \geq B + C$ и $cA \geq cB$ для любого ограниченного самосопряженного оператора C и для любого неотрицательного числа c . Здесь мы замечаем аналогию между отношением порядка во множестве операторов и во множестве вещественных чисел. Однако аналогия эта частична, так как существуют пары самосопряженных операторов, ни один из которых не превосходит другого в указанном смысле.

Отметим здесь следующее предложение, которое касается отношения порядка и может быть доказано без привлечения понятия спектральной функции: неравенство $A \geq B$ не нарушается, если обе его части умножить на неотрицательный самосопряженный оператор C , перестановочный и с оператором A , и с оператором B [4].

В настоящей статье проводится более детальное изучение отношения порядка для операторов. В § I приведены следствия неравенства $A \geq B$. Во втором разделе это неравенство изучается в связи с неравенствами для монотонных функций от операторов. В последнем разделе поставлена задача теории возмущений, связанная с неравенствами для операторов, и приведены частные случаи разрешимости этой задачи; а также дан пример отрицательного характера. Необходимые сведения по теории линейных операторов содержатся в книге [4].

§ 1.

Теорема 1. Даны два ограниченных самосопряженных оператора A и B с соответствующими спектральными функциями E_λ и F_λ . Пусть наименьшие отрезки, содержащие спектры операторов A и B , есть соответственно $[p, P]$ и $[q, Q]$. Если выполняется неравенство $A \geq B$, то тогда имеют место неравенства $p \geq q$, $P \geq Q$.

Доказательство. Пусть выполняется неравенство $p < q$. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что имеет место неравенство $p + \varepsilon < q$. Так как $[p, P]$ — наименьший отрезок, содержащий спектр оператора A , то подпространство $E_{p+\varepsilon}H$ не пусто. Существует элемент $x_0 \in E_{p+\varepsilon}H$ такой, что $\|x_0\| = 1$. Отсюда получаем неравенства $(Ax_0, x_0) \leq p + \varepsilon$, $(Bx_0, x_0) \geq q$, а это противоречит неравенству $A \geq B$. Аналогично доказывается и соотношение $P \geq Q$.

Теорема 2. Если два ограниченных самосопряженных оператора A и B с соответствующими спектральными функциями E_λ и F_λ подчиняются неравенству $A \geq B$, то при любом вещественном λ и любом $\varepsilon > 0$ пересечение подпространств $E_{\lambda-\varepsilon}H$ и $(E - F_\lambda)H$ не содержит ни одного, отличного от нулевого элемента (через E обозначен оператор тождественного преобразования).

Доказательство. Пусть элемент $x_0, \|x_0\| = 1$ принадлежит пересечению подпространств $E_{\lambda-\varepsilon}H$ и $(E - F_\lambda)H$. Отсюда мы получаем неравенства $(Ax_0, x_0) \leq \lambda - \varepsilon$ и $(Bx_0, x_0) \geq \lambda$, что противоречит неравенству $A \geq B$.

Следующая теорема принадлежит Като [2]. Она доказана им для неограниченных самосопряженных операторов, но в несколько иной форме. Более ранний и более общий результат аналогичного типа получен Хайнцем [3].

Теорема 3. Если два ограниченных самосопряженных оператора A и B подчиняются неравенству $A \geq B$, то тогда для любого числа σ , $0 \leq \sigma \leq 1$ справедливо неравенство $A^\sigma \geq B^\sigma$.

Доказательство. Неравенство $A^\sigma \geq B^\sigma$ означает, что для всех элементов $x \in H$ выполняется неравенство $(A^\sigma x, x) \geq (B^\sigma x, x)$, которое в силу неотрицательности операторов A^σ и B^σ (неотрицательность операторов A^σ и B^σ следует из неотрицательности операторов A и B и из неотрицательности функции t^σ , $0 \leq \sigma \leq 1$ при $t \geq 0$) можно переписать в виде $\|A^{\frac{\sigma}{2}} x\| \geq \|B^{\frac{\sigma}{2}} x\|$, где операторы $A^{\frac{\sigma}{2}}$ и $B^{\frac{\sigma}{2}}$ есть неотрицательные квадратные корни из операторов A^σ и B^σ .

Предположим, что для двух чисел α и β , связанных неравенством $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, неравенства $A^\alpha \geq B^\alpha$ и $A^\beta \geq B^\beta$ справедливы, и докажем справедливость неравенства $A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$. Так как для $\alpha=0$ и $\beta=1$ неравенства $A^\alpha \geq B^\alpha$ и $A^\beta \geq B^\beta$ справедливы, то повторное применение этого результата даст справедливость

неравенств $A^\sigma \geq B^\sigma$ для множества чисел σ вида $\frac{2i-1}{2^\kappa}$, $\kappa=1,2,\dots$, $i=1,2,3,\dots, 2^\kappa-1$ плотного на сегменте $[0,1]$. В силу непрерывности операторов A^σ и B^σ по σ получаем справедливость неравенств $A^\sigma \geq B^\sigma$ для всех чисел из сегмента $[0,1]$. Итак, пусть для двух чисел α и β , $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ неравенства $A^\alpha \geq B^\alpha$ и $A^\beta \geq B^\beta$ справедливы. Докажем справедливость неравенства $A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

I. Нижняя грань спектра оператора A , которую мы обозначим через ρ , больше нуля. Пусть ν —вещественное число, принадлежащее спектру оператора $C = A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$. По любому числу $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x_0 \in H$, $\|x_0\|=1$ такой, что выполняется неравенство $\|(C - \nu E)x_0\| < \varepsilon$. Определим элемент y_0 равенством $y_0 = (C - \nu E)x_0 = A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}x_0 - B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}x_0 - \nu x_0$. Очевидно, что норма элемента y_0 меньше ε . Умножим равенство $y_0 = A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}x_0 - B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}x_0 - \nu x_0$ скалярно на элемент $A^{\frac{\beta-\alpha}{2}}x_0$, получим соотношение:

$$\begin{aligned} \left(y_0, A^{\frac{\beta-\alpha}{2}}x_0\right) &= \left(A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}x_0, A^{\frac{\beta-\alpha}{2}}x_0\right) - \left(B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}x_0, A^{\frac{\beta-\alpha}{2}}x_0\right) - \\ &- \left(\nu x_0, A^{\frac{\beta-\alpha}{2}}x_0\right) = \left\|A^{\frac{\beta}{2}}x_0\right\|^2 - \left(B^{\frac{\beta}{2}}x_0, B^{\frac{\alpha}{2}}A^{\frac{\beta-\alpha}{2}}x_0\right) - \left(\nu x_0, A^{\frac{\beta-\alpha}{2}}x_0\right). \end{aligned}$$

Перепишем это равенство в следующем виде:

$$\left\|A^{\frac{\beta}{2}}x_0\right\|^2 - \left(\nu x_0, A^{\frac{\beta-\alpha}{2}}x_0\right) = \left(B^{\frac{\beta}{2}}x_0, B^{\frac{\alpha}{2}}A^{\frac{\beta-\alpha}{2}}x_0\right) + \left(\nu x_0, A^{\frac{\beta-\alpha}{2}}x_0\right).$$

К правой части последнего соотношения применим неравенство Буняковского:

$$\begin{aligned} \left\|A^{\frac{\beta}{2}}x_0\right\|^2 - \left(\nu x_0, A^{\frac{\beta-\alpha}{2}}x_0\right) &\leq \left\|B^{\frac{\beta}{2}}x_0\right\| \cdot \left\|B^{\frac{\alpha}{2}}A^{\frac{\beta-\alpha}{2}}x_0\right\| + \\ &+ \|\nu x_0\| \cdot \left\|A^{\frac{\beta-\alpha}{2}}x_0\right\|. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь неравенствами:

$$\left\|B^{\frac{\beta}{2}}x\right\| \leq \left\|A^{\frac{\beta}{2}}x\right\| \text{ и } \left\|B^{\frac{\alpha}{2}}x\right\| \leq \left\|A^{\frac{\alpha}{2}}x\right\|,$$

которые имеют место по предположению о справедливости неравенств $A^\alpha \geq B^\alpha$ и $A^\beta \geq B^\beta$, получим следующий результат:

$$\begin{aligned} \left\| A^{\frac{\beta}{2}} x_0 \right\|^2 - \left(x_0, A^{\frac{\beta-\alpha}{2}} x_0 \right) &\leq \left\| A^{\frac{\beta}{2}} x_0 \right\| \cdot \left\| A^{\frac{\alpha}{2}} A^{\frac{\beta-\alpha}{2}} x_0 \right\| + \\ &+ \|y_0\| \cdot \left\| A^{\frac{\beta-\alpha}{2}} x_0 \right\| = \left\| A^{\frac{\beta}{2}} x_0 \right\|^2 + \|y_0\| \cdot \left\| A^{\frac{\beta-\alpha}{2}} x_0 \right\|. \end{aligned}$$

Из полученного соотношения следует неравенство:

$$\nu \geq \frac{-\|y_0\| \cdot \left\| A^{\frac{\beta-\alpha}{2}} x_0 \right\|}{\left(x_0, A^{\frac{\beta-\alpha}{2}} x_0 \right)} \geq \frac{-\varepsilon \|A\|^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}{\left\| A^{\frac{\beta-\alpha}{2}} x_0 \right\|^2} \geq \frac{-\varepsilon \|A\|^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}{p^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}.$$

Так как число $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, то отсюда заключаем, что число ν — неотрицательно. Это доказывает неотрицательность оператора C , так как ν — произвольная

точка спектра оператора C . Неравенство $A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq B^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ доказано, что и завершает доказательство теоремы в случае, когда нижняя грань спектра оператора A положительна.

II. Нижняя грань спектра оператора A равна нулю. Рассмотрим вспомогательный оператор $A_\varepsilon = A + \varepsilon E$, где число ε положительно. Очевидно, что нижняя грань спектра оператора A_ε положительна (равна ε). Далее, мы имеем неравенство:

$$(A_\varepsilon x, x) = (Ax, x) + \varepsilon(x, x) \geq (Ax, x) \geq (Bx, x),$$

из которого по пункту I следуют неравенства $A_\varepsilon^\sigma \geq B^\sigma$ для всех чисел σ , $0 \leq \sigma \leq 1$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем требуемый результат, что полностью завершает доказательство теоремы.

§ 2.

Теорема 4. Чтобы для двух ограниченных самосопряженных операторов A и B из неравенства $A \geq B \geq 0$ следовало неравенство $\varphi(A) \geq \varphi(B)$ при любой монотонно возрастающей функции $\varphi(t)$ вещественного аргумента, определенной на наименьшем отрезке, содержащем спектры обоих операторов, необходимо и достаточно, чтобы спектральные функции операторов A и B , E_λ и F_λ при всех λ подчинялись неравенству $E_\lambda \leq F_\lambda$.

Эта теорема содержится в статье автора, напечатанной в журнале «Успехи математических наук» [1] и посвященной выяснению зависимости между неравенством $E_\lambda \leq F_\lambda$, выполняющимся при всех λ , и перестановочностью операторов из некоторой последователь-

ности, определяемой операторами A и B . Так как нам, кроме результата этой теоремы, понадобятся некоторые факты из ее доказательства, то приводим здесь доказательство необходимости условий теоремы.

Пусть при $A=a$ неравенство $E_a < P_a$ не выполняется. Для того, чтобы получить противоречие, достаточно найти хотя бы одну монотонно возрастающую функцию $1/(t)$ такую, что неравенство не имеет места. Это будет функция при достаточно большом t . Так как условие $E_a < E_a$ не выполняется, то это значит, что оператор $E_a(E - E_a)$ отличен от оператора аннулирования. Далее можно утверждать, что при достаточно малом t будет выполняться соотношение $E_a(E - P_{a+\alpha}) \neq 0$.

Действительно, если бы при любом сколь угодно малом $\alpha > 0$ выполнялось соотношение $E_a(E - P_{a+\alpha}) = 0$, то в силу односторонней непрерывности спектральных функций мы имели бы равенство $E_a(E - E_a) = 0$, равносильное неравенству $E_a < E_a$ и противоречащее нашему предположению. Итак, мы имеем соотношение $E_a(E - P_{a+\alpha}) \neq 0$ при $\alpha > 0$. Это означает, что существует элемент $x \in E_a H$, $x \neq 0$ такой, что $\| (E - P_{a+\alpha})x \| > 0$.

Рассмотрим скалярные произведения $(A^t x, x)$ и $(B^t x, x)$.

a

$$(A^t x, x) = \| X^t (Y x, 0) \| = \| 1^t c_1(E - P_{a+\alpha})x \|^2 = a^t (x, x) = a^t$$

$$(B^t x, x) = \| a^t (Y x, 0) \|^2 = \| a^t (E - P_{a+\alpha})x \|^2 =$$

$a + \epsilon$

$$\begin{aligned} & \| a^t (E - P_{a+\alpha})x \|^2 = a^t \| (E - P_{a+\alpha})x \|^2 = \\ & = (a + \epsilon) \| x \|^2. \end{aligned}$$

Сравнивая выражения для $(A^t x, x)$ и $(B^t x, x)$, видим, что при достаточно большом t будет справедливо неравенство $(A^t x, x) < (B^t x, x)$. Противоречие получено, так как неравенство $A^t < B^t$ не имеет места при достаточно большом t , хотя функция $1/t$ монотонно возрастает при t и неотрицательных t .

Пример. Этот пример показывает, что неравенство $A < B$ может выполняться, а соотношение $Yx \in E_a$ выполняется не при всех x . Пусть операторы A и B действуют в двумерном евклидовом пространстве и задаются матрицами второго порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ неотрицательна (все главные миноры

этой матрицы неотрицательны). Матрица A имеет собственные значения $\lambda_1=7$ и $\lambda_2=4$, а матрица B — $\mu_1=5$ и $\mu_2=1$.

Пусть нормированными собственными векторами матрицы A будут соответственно векторы e_1 и e_2 . Тогда нормированными собственными векторами матрицы B будут соответственно векторы $\frac{\sqrt{2}}{2}(e_1+e_2)$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}(e_1-e_2)$. Пусть $a=4,5$. Тогда соотношение $E_a \leq F_a$ не имеет места. Действительно, подпространство $F_a H$ образовано вектором $\frac{\sqrt{2}}{2}(e_1-e_2)$ и, очевидно, не содержит подпространства

$E_a H$, которое образовано вектором e_2 . Легко проверить, что неравенство $A^2 \geq B^2$ для этих матриц не выполняется, т. е. в этом случае уже для $m=2$ неравенство $A^m \geq B^m$ не имеет места. Условие $E_\lambda \geq F_\lambda$, выполняющееся при всех λ , для матриц второго порядка сводится либо к перестановочности матриц A и B , либо к выполнению неравенства $A \geq cE \geq B$.

Теорема 5. Если два ограниченных самосопряженных оператора A и B подчиняются неравенству $A \geq B \geq 0$, а их спектральные функции E_λ и F_λ не при всех λ удовлетворяют соотношению $E_\lambda \leq F_\lambda$, то тогда существует такое число $\gamma \geq 1$, что для всех чисел из сегмента $0 \leq \sigma \leq \gamma$ справедливы неравенства $A^\sigma \geq B^\sigma$, а для любого числа $\sigma_0 > \gamma$ операторы A^{σ_0} и B^{σ_0} несравнимы.

Доказательство. Рассмотрим множество чисел σ , для которых справедливо неравенство $A^\sigma \geq B^\sigma$. По теореме 3 § 1 это множество содержит, по крайней мере, сегмент $[0, 1]$. По доказательству необходимости в предыдущей теореме множество чисел σ , для которых имеют место неравенства $A^\sigma \geq B^\sigma$, ограничено сверху. Поэтому число γ можно определить равенством $\gamma = \sup \sigma$. Для чисел σ из сегмента $[0, \gamma]$ неравенства $A^\sigma \geq B^\sigma$ следуют из неравенства $A^\tau \geq B^\tau$ по теореме 3 § 1.

Покажем, что при любом $\sigma_0 > \gamma$ операторы A^{σ_0} и B^{σ_0} несравнимы. Пусть при $\sigma_0 > \gamma$ выполняется неравенство $A^{\sigma_0} \geq B^{\sigma_0}$, тогда это соотношение противоречит определению числа γ как точной верхней грани чисел σ , для которых справедливы неравенства $A^\sigma \geq B^\sigma$. Если же при некотором $\sigma_0 > \gamma$ выполняется неравенство $A^{\sigma_0} \leq B^{\sigma_0}$, то из неотрицательности оператора A^{σ_0} по теореме 3 § 1 мы получили бы неравенство $A \leq B$, противоречащее условию, что полностью завершает доказательство теоремы.

§ 3.

Рассмотрим следующую задачу. Дан неотрицательный самосопряженный ограниченный оператор A , каким должен быть неотрицательный самосопряженный ограниченный оператор B , для того, чтобы при любой монотонно возрастающей непрерывной функ-

ции $\varphi(t)$ вещественного аргумента имело место неравенство $\varphi(A+B) \geq \varphi(A)$. Эта задача из теории возмущений, так как здесь необходимо определить спектральные свойства суммы операторов A и B . В теореме этого параграфа приведены достаточные условия, которым должен удовлетворять оператор B , чтобы неравенство $\varphi(A+B) \geq \varphi(A)$ имело место для любой монотонно возрастающей функции $\varphi(t)$. Затем приведен упомянутый во введении пример.

Теорема 6. Даны два ограниченных самосопряженных оператора $A \geq 0$, $B \geq 0$. Если оператор B перестановочен с оператором A , или же подчиняется неравенству $B \geq cE - A \geq 0$, то тогда для любой непрерывной монотонно возрастающей функции $\varphi(t)$, определенной на наименьшем отрезке, содержащем спектры операторов $A+B$ и A , справедливо неравенство: $\varphi(A+B) \geq \varphi(A)$.

Доказательство. По теореме 4 § 2 для доказательства теоремы 6 достаточно показать, что спектральные функции операторов $A+B$ и A , G_λ и E_λ при всех λ подчиняются неравенству $G_\lambda \leq E_\lambda$. Если оператор B перестановочен с оператором A , то тогда, очевидно, оператор $A+B$ перестановочен с оператором A . Кроме того, по неотрицательности оператора B имеем неравенство $A+B \geq A$. Предположим, что для $\lambda = a$ неравенство $G_a \leq E_a$ не имеет места. Тогда при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ оператор $G_a(E - E_{a+\varepsilon})$ отличен от оператора аннулирования (см. доказательство необходимости в теореме 4 § 2). Так как проекторы G_a и $(E - E_{a+\varepsilon})$ перестановочны, что следует из перестановочности операторов $A+B$ и A , то оператор $G_a(E - E_{a+\varepsilon})$ является проектором на некоторое подпространство L , содержащее отличные от нулевого элементы. Пусть элемент $x_0 \in L$, $\|x_0\| = 1$, тогда $x_0 \in G_a H$ и $x_0 \in (E - E_{a+\varepsilon}) H$. Отсюда мы получаем соотношения $(A+B)x_0, x_0 \leq a$ и $(Ax_0, x_0) \geq a + \varepsilon$, противоречащие неравенству $A+B \geq A$.

Итак, в случае перестановочности операторов A и B неравенство $G_\lambda \leq E_\lambda$ имеет место при всех λ . В случае справедливости неравенства $B \geq cE - A \geq 0$, добавление ко всем частям этого неравенства оператора A приводит к соотношению $A+B \geq cE \geq A$, которое означает, что точка c лежит между спектрами операторов $A+B$ и A . Из раздельности спектров операторов $A+B$ и A немедленно следует справедливость неравенства $G_\lambda \leq E_\lambda$ при всех λ . Теорема полностью доказана.

Пример. Покажем, что условие $E_\lambda \leq F_\lambda$, выполняющееся при всех λ , не является достаточным для справедливости неравенства $G_\lambda \leq E_\lambda$ при всех λ (здесь E_λ, F_λ и G_λ — соответственно спектральные функции операторов A, B и $A+B$). Пусть операторы A и B действуют в трехмерном евклидовом пространстве и задаются матрицами:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{273}{1280} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Собственными значениями матрицы B являются, очевидно, числа $\mu_1 = \frac{3}{2}$, $\mu_2 = \frac{273}{1280}$, $\mu_3 = 0$. Пусть соответствующими

нормированными собственными векторами этой матрицы будут векторы g_1, g_2, g_3 . Собственные значения матрицы A есть числа $\lambda_1=4$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$ с соответствующими нормированными собственными векторами $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}g_1 - \frac{1}{2}g_2 + \frac{1}{2}g_3$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}g_1 + \frac{1}{2}g_2 - \frac{1}{2}g_3$,

$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}g_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}g_3$. По этим данным легко проверить, что при всех λ имеет место неравенство $E_\lambda \leq F_\lambda$ (неравенства $A \geq 0$, $B \geq 0$ следуют из неотрицательности наименьших собственных значений λ_3 и μ_3). Наименьшему собственному значению матрицы $A+B$ $\nu_3=1$ соответствует собственный вектор $f_3 = -5\sqrt{2}g_1 + 256g_2 + 290g_3$. По неотрицательности матрицы B имеем неравенства $\nu_1 \geq \lambda_1$, $\nu_2 \geq \lambda_2$. Положим, $a=1,2$, тогда подпространство $E_a H$ образовано вектором $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}g_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}g_3$ и не содержит подпространства $G_a H$, образованного вектором $f_3 = -5\sqrt{2}g_1 + 256g_2 + 290g_3$, т. е. проекторы E_a и G_a несравнимы. Это показывает недостаточность условия $E_\lambda \leq F_\lambda$, выполняющегося при каждом λ , для справедливости неравенства $G_\lambda \leq E_\lambda$ при всех λ .

Аналогично доказывается, что не имеет места неравенство $G_a \leq F_a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Князев П. Н. Об условии сохранения монотонными функциями отношения порядка для операторов. Успехи математических наук, т. XIV, вып. 5, 1959.
2. Kato T. Notes on some inequalities for linear operators. Math. Ann. 125:2, 1952.
3. Heinz E. Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann. 123:4, 1951.
4. Рисс Ф. и Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., Институтиздат, 1954.

Б. А. ЗЕЙНАЛОВ

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ $AX=XB$ В ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МАТРИЦАХ

Решение уравнения $AX=XB$ дает прямой метод построения всех целочисленных преобразующих матриц для двух данных подобных целочисленных матриц. Кроме того, этот метод дает возможность исследовать вопрос о существовании нетривиальных целочисленных решений. Решение поставленной задачи использует теорию решения в целых числах системы линейных уравнений [2].

Пусть дано уравнение:

$$AX=XB,$$

где $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$ — данные целочисленные матрицы n -го порядка, $X=[x_{ij}]$ — искомая целочисленная матрица.

Обозначим строки искомой матрицы X через

$$X_1=(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}),$$

$$X_2=(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}),$$

$$\dots$$

$$X_n=(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}).$$

Данное матричное уравнение, как легко проверить, эквивалентно следующей системе n -уравнений с n -неизвестными векторами $X_1, X_2, \dots, X_n$:

$$X_1(a_{11}E - B) + X_2(a_{12}E) + \dots + X_{n-1}(a_{1,n-1}E) + X_n(a_{1n}E) = \bar{0},$$

$$X_1(a_{21}E) + X_2(a_{22}E - B) + \dots + X_{n-1}(a_{2,n-1}E) + X_n(a_{2n}E) = \bar{0},$$

$$\dots \dots \dots (a)$$

$$X_1(a_{n1}E) + X_2(a_{n2}E) + \dots + X_{n-1}(a_{n,n-1}E) + X_n(a_{nn}E - B) = \bar{0},$$

где E — единичная матрица n -го порядка. Если будут найдены целочисленные векторы $X_1, X_2, \dots, X_n$, удовлетворяющие этой систе-

ме уравнений, то тем самым будет найдена целочисленная матрица X , удовлетворяющая данному уравнению. Заметим, что система уравнений (а), а потому и данное матричное уравнение, в свою очередь, эквивалентна системе n^2 линейных однородных уравнений с n^2 неизвестными $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}$.

В блочной матрице

$$\begin{bmatrix} a_{11}E-B & a_{12}E & \dots & a_{1n}E \\ a_{21}E & a_{22}E-B & \dots & a_{2n}E \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}E & a_{n2}E & \dots & a_{nn}E-B \end{bmatrix}$$

все блоки и матрицы, получающиеся в результате сложения, вычитания и умножения этих блоков, суть перестановочные между собой матрицы n -го порядка.

Ввиду этого справедливо равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{11}E-B & a_{12}E & \dots & a_{1n}E \\ a_{21}E & a_{22}E-B & \dots & a_{2n}E \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}E & a_{n2}E & \dots & a_{nn}E-B \end{vmatrix} = \varphi(B),$$

где $\varphi(\lambda)$ —характеристический многочлен матрицы A . Данное матричное уравнение всегда обладает тривиальным нулевым решением (нулевая матрица).

Вопрос о том, при каких условиях данное уравнение обладает также нетривиальными целочисленными решениями, устанавливается следующей теоремой:

Теорема: Матричное уравнение $AX=XB$ тогда и только тогда обладает нетривиальными целочисленными решениями, если матрицы A и B имеют общее характеристическое число (т. е., если их характеристические многочлены не взаимно просты).

Доказательство теоремы вытекает из следующего предложения:

(I) Если $\varphi(\lambda)=|\lambda E-A|$ —характеристический многочлен, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ —характеристические числа матрицы A и $g(\lambda)$ —произвольный многочлен, то определитель матрицы $g(A)$ удовлетворяет равенству:

$$|g(A)| = g(\lambda_1)g(\lambda_2) \dots g(\lambda_n) = R(g, \varphi),$$

где $R(g, \varphi)$ — результат многочленов. [1].

Для доказательства обозначим через $f(\lambda)$ —характеристический многочлен, а через $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ —характеристические числа матрицы B . Если теперь матрицы A и B имеют общее характеристическое число μ_1 : $\varphi(\mu_1)=f(\mu_1)=0$, то из равенства

систему уравнений (2). Умножим справа обе части каждого из уравнений, начиная с третьего, на неособенную матрицу $A'_{2,n-1}$. Затем, умножая справа обе части второго уравнения последовательно на матрицы $A'_{3,n-1}, \dots, A'_{n,n-1}$, отнимем обе части второго уравнения из соответствующих частей соответственно третьего, четвертого, ..., n -го уравнения. Получим следующую систему уравнений, эквивалентную системе (2), а поэтому и системе (1):

$$\begin{aligned} X_1(A_{11}-B) + \dots + X_{n-2}A_{1,n-2} + X_{n-1}A_{1,n-1} + X_nA_{1n} &= \bar{0}, \\ X_1A'_{21} + \dots + X_{n-2}A'_{2,n-2} + X_{n-1}A'_{2,n-1} &= \bar{0}, \\ X_1A''_{31} + \dots + X_{n-2}A''_{3,n-2} &= \bar{0}, \\ &\dots \dots \dots \\ X_1A''_{n1} + \dots + X_{n-2}A''_{n,n-2} &= \bar{0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Предположим, для определенности, что имеет место

$$\left| A^{(i-1)}_{i,n-i+1} \right| \neq 0 \text{ для } i=2,3,\dots,k.$$

Этого не будет лишь в том случае, если среди матриц $A^{(i-1)}_{i,n-i+1}$ нет неособенных скалярных матриц и в то же время все многочлены $f^{(i-1)}_{i,n-i+1}(\lambda)$ имеют общий корень с характеристическим многочленом $f(\lambda)$ матрицы В. Продолжив процесс исключения в соответствии с нашим предположением, мы придем к следующей системе уравнений, эквивалентной исходной системе уравнений (1):

$$\begin{aligned} X_1(A_{11}-B) + \dots + X_{n-1}A_{1,n-1} + X_nA_{1n} &= \bar{0}, \\ X_1A'_{21} + \dots + X_{n-1}A'_{2,n-1} &= \bar{0} \\ &\dots \dots \dots \\ X_1A^{(k-1)}_{k1} + \dots + X_kA^{(k-1)}_{n-k+1} &= \bar{0}. \end{aligned} \quad (\kappa)$$

Система содержит k -уравнений, $k \leq n$, так как некоторые уравнения оказались, возможно, отброшенными как тождества.

Если $\kappa=n$, то последнее уравнение системы имеет вид:

$$X_1A^{(n-1)}_{n1} = \bar{0}.$$

Если теперь $(f(\lambda), f_{n1}^{n-1}(\lambda))=1$ (что равносильно соотношению $(f(\lambda), \varphi(\lambda))=1$), то $\left| A^{(n-1)}_{n1} \right| \neq 0$ и X_1 — нулевой вектор. Легко

видеть, что тогда и все векторы $X_2, \dots, X_n$ суть нулевые векторы и данное матричное уравнение обладает только тривиальным нулевым решением (нулевая матрица).

Этот вывод, понятно, находится в согласии с вышеприведенным критерием существования нетривиального решения уравнения $AX=XB$. Если же характеристические многочлены $\varphi(\lambda)$ и $\tilde{f}(\lambda)$ матриц A и B имеют общий корень, то матрица $f_{n1}^{(n-1)}(B) = A_{n1}^{(n-1)}$ будет особенной и тогда X_1 можно определить ненулевым целочисленным вектором, для чего нужно решать в целых числах систему линейных однородных уравнений, эквивалентную уравнению:

$$X_1 A_{n1}^{(n-1)} = \bar{0}.$$

Для получения целочисленных векторов $X_2, \dots, X_n$ последовательно решаем в целых числах системы линейных уравнений, эквивалентных предыдущим уравнениям системы. Тем самым будет найдена искомая целочисленная матрица X .

Случай, когда $k < n$, для решения ничего нового не представляет.

Наконец, может оказаться, что в результате процесса исключения мы приходим к системе уравнений вида:

$$X_1(A_{11} - B) + \dots + X_{n-1}A_{1,n-1} + X_n A_{1n} = \bar{0},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X_1 A_{k1}^{(k-1)} + \dots + X_{\kappa} A_{\kappa, n-k+1}^{(k-1)} = \bar{0},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X_1 A_{n1}^{(k-1)} + \dots + X_{\kappa} A_{\kappa, n-k+1}^{(k-1)} = \bar{0},$$

для которой в блочной матрице

$$\begin{bmatrix} A_{k1}^{(\kappa-1)} & A_{k2}^{(\kappa-1)} & \dots & A_{\kappa, n-\kappa+1}^{(\kappa-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}^{(\kappa-1)} & A_{n2}^{(\kappa-1)} & \dots & A_{\kappa, n-\kappa+1}^{(\kappa-1)} \end{bmatrix}$$

все блоки окажутся особенными матрицами. Это будет иметь место, если все скалярные блоки—нулевые матрицы, а не скалярным блокам соответствуют многочлены $f_{ps}^{(\kappa-1)}(\lambda)$, имеющие общий корень с характеристическим многочленом $\tilde{f}(\lambda)$ матрицы B .

Процесс исключения векторов и в этом случае можно продолжать дальше, если среди блоков, принадлежащих к одному и тому же столбцу, в последней блочной матрице существует такой блок, что все остальные блоки этого столбца отличаются от него либо на скалярный, либо на матричный множитель. Дальнейший ход решения независимо от того, будет ли продолжен процесс исключения или нет, состоит в переходе от уравнений, содержащих векторы, к соответствующим им линейным уравнениям и в решении полученной системы линейных уравнений в целых числах.

Замечания

1. При практическом решении системы уравнений (1) методом Гаусса, как и для обыкновенных линейных уравнений, следует выписать блочную матрицу, соответствующую этой системе, и все преобразования выполнять над строками этой блочной матрицы.

2. Число целых параметров, входящих в общее целочисленное решение данного матричного уравнения, легко подсчитать после преобразования блочной матрицы до получения самого решения.

3. Предложенный алгоритм решения уравнения $AX=XB$ в целочисленных матрицах фактически не требует ни знания характеристических многочленов, ни знания элементарных делителей матриц A и B и вполне осуществляется элементарными средствами линейной алгебры.

Приведем один пример. Пусть требуется решить в целочисленных матрицах матричное уравнение $AX=XB$, где

$$A = \begin{bmatrix} 3, -2, 1 \\ 2, -2, 2 \\ 3, -6, 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 24, -11, -22 \\ 20, -8, -20 \\ 12, -6, -10 \end{bmatrix}.$$

Решив это уравнение, получим:

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 22a+20b+12c-6d-10e, & -22a-20b-12c+6d+11e, \\ c & d \\ 65a+60b+36c-12d-20e, & -55a-51b-30c+12d+22e, \\ -20a-20b-13c+2d. \end{bmatrix},$$

где a, b, c, d, e — произвольные целые числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1953.
2. Зейналов Б. А. Уч. записки ДГУ, т. V, вып. I, 1960.
3. Мальцев А. М. Основы линейной алгебры. Гостехиздат; 1956.
2. Ученые записки, том 7.

201654

Дагестанский Гос. университет
им. В. И. Ленина
БИБЛИОТЕКА

М. М. ГЕХТМАН

РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЯДЕР С n -КРАТНЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ

В статье Ю. М. Березанского [1] указывается, что в том случае, если в гильбертовом пространстве действует конечное число самосопряженных операторов $A_1, A_2, \dots, A_n$, попарно коммутирующих между собою, то, построив по ним операторную меру $E(\Delta)$, где Δ — борелевское множество точек $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, можно построить разложение по собственным функциям аналогично тому, как это сделано в работе [1].

Целью настоящей заметки является доказательство, при весьма жестких предположениях, n -мерной теоремы Бохнера. При этом существенно использованы методы и результаты работ Ю. М. Березанского [1], [2], [3], а также факты, относящиеся к дифференцированию аддитивных функций множеств [5].

§ 1.

1. Пусть R — метрическое сепарабельное пространство и $m = (m_n)$ — его регулярная сеть. Пусть еще в R определена мера μ — для всех борелевских множеств, удовлетворяющая условию $\mu(R) < \infty$, и Φ — аддитивная функция множеств, (B) -измеримых в R . Имеет место следующая теорема, приведенная С. Саксом в работе [5].

Теорема. Пусть Φ — аддитивная функция (B) -множеств в R . Тогда почти всюду существует $(\mu, m)D\Phi(x)$ — производная функции Φ в точке $x \in R$ относительно меры μ и регулярной последовательности сетей m_n . Кроме того, если $E = \infty, E_\infty$ — множество точек, где $(\mu, m)D\Phi(x)$ равна соответственно $+\infty$ или $-\infty$, то для всех X , (B) -измеримых в R , имеет место равенство:

$$\Phi(X) = \Phi(X \cap E_\infty) + \Phi(X \cap E_{-\infty}) + \int_X (\mu, m)D\Phi(x) d\mu(x)$$

Если дополнительно потребовать, чтобы $\Phi(x)$ являлась мерой множества X , абсолютно непрерывной относительно меры $\mu(x)$, то получим теорему Радона—Никодима:

$$\Phi(X) = \int_X (\mu, m) D\Phi(x) d\mu(x). \quad (1)$$

2. Если в гильбертовом пространстве H действуют $A_1, \dots, A_n$ самосопряженных операторов, попарно коммутирующих в том смысле, что соответствующие разложения единицы $E_{\lambda 1}^{(1)}, \dots, E_{\lambda n}^{(n)}$ коммутируют при всех λ , тогда, как известно, можно построить операторную меру $E(\Delta)$, где Δ —борелевское множество $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, обладающую свойствами обычной спектральной меры [4], [5]. Для дальнейшего существенно, что эта мера абсолютно аддитивна и положительно определенная в том смысле, что ее значениями служат ограниченные неотрицательные операторы в H . Применяя метод Ю. М. Березанского [1], легко доказать следующую лемму.

Лемма. Почти для всех λ (относительно $d\rho(\lambda)$) существует $\Psi(\lambda) \geq 0$ такая, что для любого борелевского множества Δ

$$E(\Delta) = \int_{\Delta} \Psi(\lambda) d\rho(\lambda) = \int \cdot \cdot \cdot \int \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\rho(\lambda_1 \cdot \cdot \cdot \lambda_n) \quad (2)$$

(интеграл понимается в слабом смысле) $|\Psi(\lambda)|_H \leq 1$.

В каждой точке $\lambda \Psi(\lambda)$ можно получить как слабый предел последовательности операторов $\frac{1}{\rho(\Delta_v)} E(\Delta_v)$, где Δ_v — последовательность ячеек регулярной сети $m = (m_v)$, стягивающихся ($v \rightarrow \infty$) к точке $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Доказательство проходит в предположении, что $\text{sl.}(E(\Delta)) < \infty$. В противном случае в H выбирается некоторый неограниченный оператор P с плотной областью определения $D(P)$, для которого существует ограниченный с конечной H -нормой обратный оператор P^{-1} , такой, что для $f, g \in D(P)$ $P^{-1} (Pf) = f$ и строится операторная ограниченная мера $\Theta(\Delta) = P^{-1} * E(\Delta) P^{-1}$.

Применяя к ней лемму, получим в общем случае

$$(E(\Delta)f, g) = \int \cdot \cdot \cdot \int (\Psi(\lambda) Pf, Pg) d\rho(\lambda). \quad (3)$$

В случае $H = L_2$ (по обычной лебеговой мере), в качестве P можно взять дифференциальный оператор $D = \frac{d^n}{dx_1 \cdot \cdot \cdot dx_n}$. Тогда для любых финитных, n -раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, $g(x)$ получим

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int \int \Psi(x, y, \lambda) Df(y) Dg(x) dx dy \right\} d\rho(\lambda), \quad (4)$$

$$\Psi(x, y, \lambda) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{(E(\Delta_v))^{\omega_x, \omega_y}}{\rho(\Delta_v)}.$$

3. Учитывая, что для многомерной меры справедливо равенство:

$$(A_l E(\Delta_v) f, g) = \int_{\Delta_v} \dots \int_{\Delta_v} \lambda_l d\lambda (E_\lambda f, g),$$

и повторяя выкладки [1], найдем, что почти для всех λ справедливо соотношение:

$$\Psi(\lambda) P(A_l - \lambda_l E) u = 0 \quad (5)$$

для счетного множества векторов $u \in D(P)$ и $A u \in D(A) \cap D(P)$. Тем самым, становится содержательным следующее.

Определение. Обобщенная функция $P\Psi$ является собственной функцией самосопряженного оператора A , если выполняется соотношение (5), и кратко напишем $AP\Psi = \lambda P\Psi$. Из рассуждений пункта 3 вытекает, что самосопряженные попарно коммутирующие операторы имеют общую систему обобщенных собственных функций в смысле приведенного выше определения. В случае $N=L_2$, $P=D \equiv \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$ равенство (5) принимает вид:

$$\int_G \Psi(x, y, \lambda) (D(A_l - \lambda_l E) u)(x) dx = 0, \quad (5')$$

G — конечная часть E_n ; и аналогичное соотношение с интегрированием по y .

§ 2.

Пусть теперь заданы n дифференциальных выражений L_i порядка r_i ($i=1, 2, \dots, n$) вида:

$$L_i[u] = \sum_{0 \leq k_1 + \dots + k_n \leq r_i} a_{k_1 \dots k_n}^i(x) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} u,$$

причем, коэффициенты $a_{k_1 \dots k_n}^i$ бесконечно дифференцируемы. $K(x_1 y)$ — положительно определенное ядро.

Теорема. Пусть L_i — попарно коммутирующие дифференциальные выражения; для того, чтобы имело место представление

$$(A) \quad K = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \Psi_{\lambda} d\rho(\lambda),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$(B) \quad L_{ix}[K] = \bar{L}_{iy}[K] \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

где $\varrho(\Delta)$ — неубывающая функция борелевских множеств, а $\Psi_{\lambda} = D_x D_y \Psi(x, y, \lambda)$ — собственная функция относительно системы дифференциальных операторов L_i в смысле нашего определения, а условие (B) — в смысле теории обобщенных функций.

Достаточность. Пусть выполнено условие (B), это значит, что операторы A_i , определяемые условиями

$$A_i[u] = \bar{L}_i^+ [u], \quad D(A_i) = C_0^{\infty}(G),$$

будут эрмитовы в скалярном произведении, построенном по ядру $K(x, y)$.

Замечание. Условие L_i — попарно коммутируют — означает, что мы требуем, чтобы самосопряженные расширения эрмитовых операторов попарно коммутировали. Вопрос о нахождении достаточных условий коммутации в указанном смысле в этой заметке не рассматривается. Тогда можно построить спектральную меру $E(\Delta)$, затем, применяя приведенную выше лемму,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \bar{\psi} \rangle &= \iint K(x, y) \varphi(y) \bar{\psi}(x) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \left\{ \iint \Psi(x, y, \lambda) D\varphi(y) D\bar{\psi}(x) dx dy \right\} d\rho(\lambda) \end{aligned}$$

для всех $\varphi, \bar{\psi} \in \Phi G$.

Произведения $\varphi\bar{\psi}$ плотны в $\Phi G \times G$, поэтому, совершая предельный переход, получим уже для всех $\varphi(x, y) \in \Phi G \times G$

$$\left\{ \iint K(x, y) \varphi(x, y) dx dy \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \left\{ \iint \Psi(x, y, \lambda) D_x D_y \varphi(x, y) dx dy \right\} d\rho(\lambda),$$

$$\text{или } K = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \psi_{\lambda} d\rho(\lambda), \text{ где } \psi_{\lambda} = D_x D_y \Psi(x, y, \lambda),$$

и равенство понимается в смысле обобщенных функций. Условие (5') тогда запишется в виде:

$$L^+_{ix}\psi_\lambda = \lambda_i\psi_\lambda, \quad \bar{L}^+_{iy}\psi_\lambda = \lambda_i\psi_\lambda, \quad (6)$$

Из положительной определенности $K(x,y)$ вытекает положительная определенность $\Psi(\lambda)$, поэтому два условия (6) эквивалентны между собою [3]. Достаточно проверить первое из них. Точный смысл его

$$\iint_{G \times G} \Psi(x,y,\lambda) D_x D_y (L^+_{ix} - \lambda_i E) \varphi(x,y) dx dy = 0. \quad (6')$$

По доказанному, почти для всех λ , относительно $d\rho(\lambda)$ и почти везде по y

$$\int_G \Psi(x,y,\lambda) (D_x L^+_{ix} u)(x) dx = \lambda_i \int_G \Psi(x,y,\lambda) D_x u(x) dx.$$

Умножая на $D_y v(y)$, затем интегрируя по y и совершая предельный переход, получим для всех $\varphi(x,y) \in \Phi_{G \times G}$ нужное нам соотношение (6).

Необходимость. Пусть $K = \int_{-\infty}^{\infty} \int (\psi_\lambda, \varphi) d\rho(\lambda)$. Для любой $\varphi \in \Phi_{G \times G}$

$$(K, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int (\psi_\lambda, \varphi) d\rho(\lambda).$$

Заменяя φ на $L^+_{ix}\varphi$ и $\bar{L}^+_{iy}\varphi$ получим:

$$(K, L^+_{ix}\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int (\Psi_\lambda, L^+_{ix}\varphi) d\rho(\lambda)$$

$$(K, \bar{L}^+_{iy}\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int (\Psi_\lambda, \bar{L}^+_{iy}\varphi) d\rho(\lambda).$$

В силу условий (6)

$$(\psi_\lambda, L^+_{ix}\varphi) = (\psi_\lambda, \bar{L}^+_{iy}\varphi),$$

поэтому

$$(K, L^+_{ix}\varphi) = (K, \bar{L}^+_{iy}\varphi)$$

или

$$L_{ix}[K] = \bar{L}_{iy}[K] \quad \text{для всех } l=1, 2, \dots, n.$$

в смысле теории обобщенных функций.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность Ю. М. Березанскому за постановку задачи.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Березанский Ю. М. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов. Укр. математ. журнал, 1959, № 1.
 2. Березанский Ю. М. Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. Математ. сборник, т. 43, 1957, № 1.
 3. Березанский Ю. М. Представление положительно определенных ядер через собственные функции дифференциальных уравнений. Математ. сборник, т. 47, 1959, № 2.
 4. Плеснер А. И., Рохлин В. А. Спектральная теория линейных операторов. II. Успехи математ. наук, т. I, 1946, № 1.
 5. Сакс С. Теория интеграла. М., 1949.
-

И. В. ЦЕНОВ

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ L^s

1. Постановка задачи и некоторые выводы

В этой статье некоторые наши результаты ([2], стр. 184—197), полученные для полиномов, наименее уклоняющихся от функции $f(x)$ в метрике пространства L^s , переносятся на полиномы, реализующие минимум интеграла.

$$I(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b p(x) |f(x) - P_n(x)|^{s(x)} dx, \quad (1.1)$$

где $P_n(x)$ — любой полином, составленный из функций $\varphi_0, \dots, \varphi_n$, линейно независимых на $[a, b]$; $p(x)$, $f(x)$ и $s(x)$ — непрерывные функции на $[a, b]$, $p(x) > 0$ и $S(x) > 1$. Предполагая, что $f(x)$ не есть полином, заключаем, что $I(a_0, \dots, a_n) > 0$ в любой точке $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ $n+1$ -мерного евклидова пространства. Докажем, что $I(a_0, \dots, a_n)$ — непрерывная функция в любой точке $(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Обозначим через L какое-нибудь фиксированное число, такое, что $|\varphi_i(x)| < L$ ($i=0, 1, \dots, n$), а через δ — любое данное положительное число. В таком случае, полагая, что $|h_i| \leq \frac{\delta}{L(n+1)}$ ($i=0, 1, \dots, n$),

для полинома $\omega(x) = \sum_{i=0}^n h_i \varphi_i$ получим очевидное неравенство $\omega(x) < (n+1) \frac{\delta}{L(n+1)} \cdot L = \delta$.

Обозначим теперь через A_δ множество всех точек $(a_0 + h_0, \dots, a_n + h_n)$, где $|h_i| \leq \frac{\delta}{L(n+1)}$, т. е. через A_δ мы обозначили замкнутый

куб в $n+1$ -мерном евклидовом пространстве, ребро которого $\frac{2\delta}{L(n+1)}$, а центр находится в точке $(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Если x пробегает сегмент $[a, \theta]$, а точка $(a'_0, \dots, a'_n)$ — куб A_δ , то функция $|a'_0 \varphi_0(x) + \dots + a'_n \varphi_n(x)|$ достигает наибольшего значения, которое мы обозначим через M . Положим еще, что $\max |f(x)| = N$. Рассмотрим теперь разность

$$\begin{aligned} \Delta I &= I(a_0 + h_0, \dots, a_n + h_n) - I(a_0, \dots, a_n) = \\ &= \int_a^b p(x) \{ |f(x) - [(a_0 + h_0)\varphi_0(x) + \dots + (a_n + h_n)\varphi_n(x)]|^{s(x)} - \\ &\quad - |f(x) - [a_0\varphi_0(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)]|^{s(x)} \} dx. \end{aligned}$$

Применяя далее неравенство $V^s - U^s < (V - U)sV^{s-1}$, где $0 \leq U < V$, мы получаем, что

$$\begin{aligned} |\Delta I| &< \int_a^b p(x)s(x) |h_0\varphi_0(x) + \dots + h_n\varphi_n(x)| (M+N)^{s(x)-1} dx < \\ &< \delta \int_a^b p(x)s(x) (M+N)^{s(x)-1} dx. \end{aligned}$$

Так как при $\delta \rightarrow 0$ M не возрастает, то заключаем, что $|\Delta I|$ также стремится к нулю, т. е. функция $I(a_0, \dots, a_n)$ непрерывна в точке $(a_0, \dots, a_n)$.

Докажем теперь, что функция $I(a_0, \dots, a_n)$ на множестве всех точек $n+1$ -мерного евклидова пространства (не компактное) достигает наименьшего значения в некоторой точке $(a^*_0, \dots, a^*_n)$, единственность которой будет доказана ниже.

Предварительно рассмотрим случай, когда $s(x)$ есть постоянное число, которое мы обозначим через σ . Для этого случая доказательство хорошо известно ([1], стр. 216—219), но из предлагаемого нами доказательства для случая $s(x) = \sigma$ будет следовать то же заключение и для общего случая.

Итак, рассмотрим функцию:

$$I(a_0, \dots, a_n) = \int_a^b p(x) |f(x) - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x)|^\sigma dx, \text{ где } \sigma > 1. \quad (1.2)$$

На замкнутом подмножестве $n+1$ -мерного евклидова пространства, состоящем из всех точек сферы $\sum_{i=0}^n a_i^2 = 1$, функция $I(a_0, \dots, a_n)$

имеет наименьшее значение и, в частности, функция

$$I_0(a_0, \dots, a_n) = \int_a^b p(x) |a_0 \varphi_0(x) + \dots + a_n \varphi_n(x)|^s dx$$

в некоторой точке $(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n)$ этой сферы достигает наименьшего значения, которое мы обозначим через μ_0 .

Так как система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно независима на $[a, b]$, заключаем, что $a_0 \varphi_0(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) \neq 0$ и, следовательно,

$$\mu_0 = \int_a^b p(x) |\bar{a}_0 \varphi_0(x) + \dots + \bar{a}_n \varphi_n(x)|^s dx > 0.$$

Из неравенства Минковского:

$$\begin{aligned} \left[\int_a^b p(x) |\varphi(x) + \psi(x)|^s dx \right]^{\frac{1}{s}} &\leq \left[\int_a^b p(x) |\varphi(x)|^s dx \right]^{\frac{1}{s}} + \\ &+ \left[\int_a^b p(x) |\psi(x)|^s dx \right]^{\frac{1}{s}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

полагая в нем $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$, получим

$$\begin{aligned} \left[\int_a^b p(x) |f(x) - \varphi(x)|^s dx \right]^{\frac{1}{s}} &\geq \left[\int_a^b p(x) |f(x)|^s dx \right]^{\frac{1}{s}} - \\ &- \left[\int_a^b p(x) |\varphi(x)|^s dx \right]^{\frac{1}{s}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Функции $p(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$, входящие в (1.3) и (1.4), предполагаем непрерывными, причем $p(x) \geq 0$.

Полагая теперь, что $(a_0, \dots, a_n)$ — любая фиксированная точка $n+1$ -мерного пространства и $\sum_{i=0}^n a_i^2 = R^2$, $\left[\int_a^b p(x) |f(x)|^s dx \right]^{\frac{1}{s}} = P$,

мы получаем,

$$\left[\int_a^b p(x) \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right|^s dx \right]^{\frac{1}{s}} \geq \left[\int_a^b p(x) \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) \right|^s dx \right]^{\frac{1}{s}} -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\int_a^b p(x) |f(x)|^\sigma dx \right]^{\frac{1}{\sigma}} = R \left[\int_a^b p(x) \left| \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{R} \varphi_i(x) \right|^\sigma dx \right]^{\frac{1}{\sigma}} - \\
& - \left[\int_a^b p(x) |f(x)|^\sigma dx \right]^{\frac{1}{\sigma}} > R^{\frac{1}{\sigma}} - \left[\int_a^b p(x) |f(x)|^\sigma dx \right]^{\frac{1}{\sigma}}.
\end{aligned}$$

Если R выбрать достаточно большим, то, следовательно, будем иметь:

$$\int_a^b p(x) \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right|^\sigma dx > \left(R^{\frac{1}{\sigma}} - P \right)^\sigma. \quad (1.5)$$

Далее замечаем, что если выбрать достаточно большое R , то найдется множество A положительной меры, для всех точек которого $\left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right| > 1$. Полагая, $B = [a, b] - A$, получаем, что

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(x) \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right|^\sigma dx &= \int_A p \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i - f \right|^\sigma dx + \\
&+ \int_B p \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i - f \right|^\sigma dx > \left(R^{\frac{1}{\sigma}} - P \right)^\sigma
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\int_A p(x) \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right|^\sigma dx > \left(R^{\frac{1}{\sigma}} - P \right)^\sigma - (b-a)\bar{p}. \quad (1.6)$$

где $\bar{p} = \max_{[a, b]} p(x)$.

Возвратимся теперь снова к функции:

$$H(u_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b p(x) \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right|^{s(x)} dx.$$

Полагая $\sigma = \min_{[a, b]} S(x)$, мы из (1.5) заключаем, что для любого наперед заданного числа $D > 0$ можем указать такое R , что для

всех точек сферы $\sum_{i=0}^n a_i^2 = R^2$ будет $\int_a^b p(x) \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right|^s dx >$

$> D$. В силу этого, как мы уже говорили, существует множество A (если D достаточно большое число) положительной меры, для

всех точек которого $\left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right| \geq 1$. Полагая далее $B = [a, b] \setminus A$, получаем:

$$\int_a^b p \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i - f \right|^{s(x)} dx = \int_A p \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i - f \right|^{s(x)} dx + \int_B p \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i - f \right|^{s(x)} dx.$$

Так как очевидно:

$$\int_A p \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i - f \right|^{s(x)} dx > \int_A p \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i - f \right|^s dx$$

$$\text{и } \int_B p \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i - f \right|^{s(x)} dx < (b-a)\bar{p}, \text{ то}$$

$$\int_a^b p \left| \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i - f \right|^{s(x)} dx > \left(R \mu_0^{\frac{1}{s}} - P \right)^s - 2(b-a)\bar{p}. \quad (1.7)$$

Предположим теперь, что R_0 выбрано так, что, например, $\left(R_0 \mu_0^{\frac{1}{s}} - P \right)^s - 2(b-a)\bar{p} > 2 \inf I(a_0, \dots, a_n)$, где нижняя граница значений функции $I(a_0, \dots, a_n)$ берется на множестве всех точек $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ $n+1$ -мерного пространства.

Неравенство (1.7) показывает, что для решения нашего вопроса мы можем ограничиться множеством точек $(a_0, \dots, a_n)$, таких,

что $\sum_{i=0}^n a_i^2 \leq R_0^2$. Но так как это множество замкнуто, то на нем

наименьшее значение непрерывной функции $I(a_0, \dots, a_n)$ достигается. Если $\inf I(a_0, \dots, a_n) = 0$, то достаточно R_0 выбрать так, чтобы

$\left(R_0 \mu_0^{\frac{1}{s}} - P \right)^s - 2(b-a)\bar{p}$ было больше нуля.

Теорема 1. Для того чтобы полином $P_n^*(x)$ реализовал

минимум интеграла (1.1), необходимо и достаточно, чтобы осуществлялись равенства:

$$\int_a^b p(x)s(x)|f(x)-P_n^*(x)|^{s(x)-1}\varphi_i(x)\operatorname{sign}[f(x)-P_n^*(x)]dx=0, \\ (i=0,1,\dots,n). \quad (1.8)$$

Доказательство необходимости ничем не отличается от соответствующего доказательства для случая, когда S постоянное число ([2], стр. 186, теорема 2).

Достаточность. Здесь мы предполагаем, что $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ образуют систему Чебышева на $[a, b]$. Пусть для полинома $Q_n^*(x)$ осуществляются равенства (1.8), а полином $P_n^*(x)$ реализует минимум интеграла (1.1).

Имеем, очевидно, что

$$\int_a^b p(x)S(x)\{|f-Q_n^*|^{s(x)-1}\operatorname{sign}[f-Q_n^*]-|f-P_n^*|^{s(x)-1}\operatorname{sign}[f-P_n^*]\}\varphi_i(x)dx=0$$

($i=0,1,\dots,n$) и, следовательно, (см. $[1]_n$, теор. 1) найдется $n+1$ точек: $a < x_1' < \dots < x_{n+1}' < b$, для которых

$$p(x_i')s(x_i')\{|f(x_i')-Q_n^*(x_i')|^{s(x_i')-1}\operatorname{sign}[f(x_i')-Q_n^*(x_i')]-|f(x_i')-P_n^*(x_i')|^{s(x_i')-1}\operatorname{sign}[f(x_i')-P_n^*(x_i')]\}=0. \\ (i=0, 1, \dots, n)$$

Учитывая, что $p(x_i')S(x_i') > 0$ мы заканчиваем доказательство аналогично тому, как это было сделано для постоянного S (см. [2], теор. 2) т. е. получаем, что $Q_n^*(x) \equiv P_n^*(x)$. Так как через $P_n^*(x)$ мы обозначили полином (любой), реализующий минимум интеграла (1.1), то из последнего тождества заключаем, что такой полином $P_n^*(x)$ единственный.

Теорема 2. Если полином $P_n^*(x)$ реализует минимум интеграла (1.1), где $P_n^*(x)$ составлен из функций $\varphi_0, \dots, \varphi_n$, образующих систему Чебышева, а $S(x) > 1$, то можно найти такие $n+2$ точки: $a < x_0 < \dots < x_{n+1} < b$, что

$$\operatorname{Sign}[f(x_i)-P_n^*(x_i)] \cdot \operatorname{Sign}[f(x_{i+1})-P_n^*(x_{i+1})] = -1 \\ (i=0,1,\dots,n) \quad (1.9)$$

Эта теорема немедленно вытекает из соответствующей теоремы

для постоянного S (см. [2], теор. 1), если для полинома $P_n^*(x)$ написать равенства (1.8).

Следствие. Уравнение $f(x) - P_n^*(x) = 0$ имеет в интервале (a, θ) , по меньшей мере, $n+1$ корней, т. е. $P_n^*(x)$ есть интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x)$.

2: Доказательство непрерывности одной функции

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — непрерывные функции на сегменте $[a, \theta]$ и имеют производные в (a, θ) нужного нам порядка. Обозначим через $P_n(f, x)$ и $P_n(\varphi, x)$ интерполяционные полиномы (Лагранжа или Эрмита), связанные соответственно с функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ и определяемые системой узлов $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Для дальнейшего нам необходимо доказать непрерывность следующей функции:

$$\varphi(x, x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{|f(x) - P_n(f, x)|}{|\varphi(x) - P_n(\varphi, x)|}.$$

Обозначим через $C^{(n+2)}$ множество точек $(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ таких, что $a \leq x \leq b, a \leq x_i \leq \theta$ ($i=0, 1, \dots, n$) т. е. $C^{(n+2)}$ куб в $n+2$ -мерном евклидовом пространстве. Чтобы областью определения функции $\varphi(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ был куб $C^{(n+2)}$, мы должны ее определить в точках, где числитель и знаменатель одновременно обращаются в нуль. Если все узлы $x_0, \dots, x_n$ различны, мы положим

$$\varphi(x_i, x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{|f'(x_i) - P_n'(f, x_i)|}{|\varphi'(x_i) - P_n'(\varphi, x_i)|} \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Здесь $\varphi'(x_i) - P_n'(\varphi, x_i) \neq 0$ ($i=0, 1, \dots, n$), так как все узлы простые.

Если же для x_i имеем, что

$$P_n(\varphi, x_i) = \varphi(x_i), \quad P_n'(\varphi, x_i) = \varphi'(x_i), \dots, \quad P_n^{(a_i-1)}(\varphi, x_i) = \varphi^{(a_i-1)}(x_i) \\ P_n(f, x_i) = f(x_i), \quad P_n'(f, x_i) = f'(x_i), \dots, \quad P_n^{(a_i-1)}(f, x_i) = f^{(a_i-1)}(x_i),$$

то в этом случае следует положить

$$\varphi(x_i, x_0, \dots, x_n) = \frac{|f^{(a_i)}(x_i) - P_n^{(a_i)}(f, x_i)|}{|\varphi^{(a_i)}(x_i) - P_n^{(a_i)}(\varphi, x_i)|},$$

где, очевидно, $\varphi^{(a_i)}(x_i) - P_n^{(a_i)}(\varphi, x_i) \neq 0$.

Предварительно докажем, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} & 1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 & 2x_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_{n-1}^n & nx_i^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.1)$$

где i —любое из чисел $0, 1, \dots, n-1$, а все числа $x_0, \dots, x_{n-1}$ различны. Рассмотрим полином:

$$P_n(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} & z \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 & z^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & z^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_{n-1}^n & z^n \end{vmatrix}. \quad (2.2)$$

Полином $P_n(z) \neq 0$, т. к. коэффициент при z^n не равен нулю. Числа $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ являются корнями этого полинома и, следовательно, $P'_n(x_i) \neq 0$ ($i=0, 1, \dots, n-1$), т. к. в противном случае полином, не равный тождественно нулю, имел бы $n+1$ корней (с учетом их кратности).

Докажем теперь, что

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \pi_0^{a_0-1} & \dots & \pi_K^{a_K-1} & \dots & \pi_K^{a_K-1} \\ x_0 & \dots & x_K & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^2 & \dots & x_K^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^{n-1} & \dots & x_K^{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^n & \dots & x_K^n & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

где символ π_r^s показывает, что этот столбец получается, если s раз продифференцировать столбец с номером r ($0 \leq r \leq K$).

Заменив в Δ_{n+1} элементы любого из столбцов $\pi_0^{a_0-1}, \dots, \pi_K^{a_K-1}$ функциями $1, z, z^2, \dots, z^n$ аналогично тому, как это было сделано в (2.2), получим полином. Делая, для определенности, такую замену в последнем столбце, мы получим полином, который обозначим через $Q_n(z)$. Применяя метод математической индукции, допустим, что $\Delta_n \neq 0$, и докажем, что в таком случае $\Delta_{n+1} \neq 0$. Прежде всего заметим, что, т. к. $\Delta_n \neq 0$, то коэффициент при z^n не равен нулю, и следовательно, $Q_n(z) \neq 0$.

Из $y_0^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$ выделяем те группы узлов, которые стремятся соответственно к $x_0, x_1, \dots, x_K$, если $m \rightarrow \infty$ и обозначим их соответственно так $x_{01}^{(m)}, x_{02}^{(m)}, \dots, x_{0\alpha_0}^{(m)}$;

$$x_{11}^{(m)}, x_{12}^{(m)}, \dots, x_{1\alpha_1}^{(m)}; \dots; x_{K1}^{(m)}, \dots, x_{K\alpha_K}^{(m)}.$$

Применяя последовательно теорему Ролля к функции $P_n(j, m, z) - f(z)$, получим, что

$$P_n(f, m, x_{01}^{(m)}) = f(x_{01}^{(m)}), P_n'(f, m, \xi_1^{(0)}) = \\ = f'(\xi_1^{(0)}), \dots, P_n^{(\alpha_0-1)}(f, m, \xi_{\alpha_0-1}^{(0)}) = f^{(\alpha_0-1)}(\xi_{\alpha_0-1}^{(0)})$$

$$\dots \\ P_n(f, m, x_{K1}^{(m)}) = f(x_{K1}^{(m)}), P_n'(f, m, \xi_1^{(\kappa)}) = \\ = f'(\xi_1^{(\kappa)}), \dots, P_n^{(\alpha_K-1)}(f, m, \xi_{\alpha_K-1}^{(\kappa)}) = f^{(\alpha_K-1)}(\xi_{\alpha_K-1}^{(\kappa)}).$$

Таким образом, для полинома $P_n(f, m, x) = b_0(m)x^n + \dots + b_n(m)$ при каждом фиксированном m имеем, что

$$\left. \begin{aligned} P_n(f, m, x_{01}^{(m)}) &= b_0(m)(x_{01}^{(m)})^n + \dots + b_n(m) = f(x_{01}^{(m)}) \\ &\dots \\ P_n(f, m, x_{K1}^{(m)}) &= b_0(m)(x_{K1}^{(m)})^n + \dots + b_n(m) = f(x_{K1}^{(m)}) \\ P_n'(f, m, \xi_1^{(0)}) &= \dots = f'(\xi_1^{(0)}) \\ &\dots \\ P_n^{(\alpha_0-1)}(f, m, \xi_{\alpha_0-1}^{(0)}) &= \dots = f^{(\alpha_0-1)}(\xi_{\alpha_0-1}^{(0)}) \\ &\dots \\ P_n'(f, m, \xi_1^{(\kappa)}) &= \dots = f'(\xi_1^{(\kappa)}) \\ &\dots \\ P_n^{(\alpha_K-1)}(f, m, \xi_{\alpha_K-1}^{(\kappa)}) &= \dots = f^{(\alpha_K-1)}(\xi_{\alpha_K-1}^{(\kappa)}) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Так как определитель Δ_{n+1} системы (2.3) отличен от нуля, то для всех точек достаточно малой окрестности точки $\bar{A}$, очевидно, Δ_{n+1} системы (2.5) также отличен от нуля и, следовательно, системы (2.3) и (2.5) мы можем решить по формулам Крамера.

Каждый определитель системы (2.5) в формулах Крамера, как легко видеть, при $m \rightarrow \infty$ будет неограниченно (равномерно) приближаться к соответствующему определителю системы (2.3) и, следовательно, $|P_n(f, m, x) - P_n(f, x)| \rightarrow 0$.

Так как

$$|P_n(f, m, x^{(m)}) - \bar{P}_n(f, \bar{x})| \leq |P_n(f, m, x^{(m)}) - \bar{P}_n(f, x^{(m)})| + \\ + |\bar{P}_n(f, x^{(m)}) - \bar{P}_n(f, \bar{x})|, \text{ то } |P_n(f, m, x^{(m)}) - \bar{P}_n(f, \bar{x})| \rightarrow 0,$$

если $m \rightarrow \infty$. Доказательство закончено.

3. Обобщение одной теоремы Шохата

Мы здесь даем обобщение одной теоремы Шохата [3], утверждающей, что

$$E_n(f)/E_n(\varphi) = |f^{(n+1)}(\xi)|/|\varphi^{(n+1)}(\xi)|, \quad (3.1)$$

где $E_n(\varphi)$ наилучшее приближение функции $\varphi(x)$ алгебраическими полиномами степени не выше n в метрике пространства $C[a, b]$.

Теорема 3. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, непрерывные на $[a, b]$, имеют производные $n+1$ порядка в (a, b) и $\varphi^{(n+1)}(x)$ не обращается в нуль в (a, b) , то для некоторого $\xi \in (a, b)$ осуществляется равенство:

$$I_n^{(s)}(f)/I_n^{(s)}(\varphi) = |f^{(n+1)}(\xi)|^{s(\xi')}/|\varphi^{(n+1)}(\xi)|^{s(\xi')},$$

где

$$I_n^{(s)}(\psi) = \min_{P_n} \int_a^b |\psi(x) - P_n(x)|^{s(x)} dx. \quad (3.2)$$

Доказательство: Обозначим через $P_n^*(\varphi, x)$ полином степени не выше n , реализующий минимум интеграла $\int_a^b |\varphi(x) - P_n(x)|^{s(x)} dx$,

где минимум рассматривается на множестве всех полиномов $P_n(x)$ степени не выше n .

Выберем такую систему узлов, для которой $P_n(\varphi, x) = P_n^*(\varphi, x)$, и через $\bar{P}_n(f, x)$ обозначим интерполяционный полином для функции $f(x)$, определяемый этой системой узлов.

Учитывая, что

$$I_n^{(s)}(f) \int_a^b |\varphi(x) - P_n^*(\varphi, x)|^{s(x)} dx - I_n^{(s)}(\varphi) \int_a^b |f(x) - P_n^*(f, x)|^{s(x)} dx = 0,$$

то

$$I_n^{(s)}(f) \int_a^b |\varphi(x) - P_n^*(\varphi, x)|^{s(x)} dx - I_n^{(s)}(\varphi) \int_a^b |f(x) - \bar{P}_n(f, x)|^{s(x)} dx \leq 0,$$

или, применив теорему о среднем значении, получим:

$$I_n^{(s)}(f) |\varphi(\xi) - P_n^*(\varphi, \xi)|^{s(\xi)} - I_n^{(s)}(\varphi) |f(\xi) - \bar{P}_n(f, \xi)|^{s(\xi)} \leq 0.$$

Полагая

$$\psi(x) = I_n^{(s)}(f) |\varphi(x) - P_n^*(\varphi, x)|^{s(x)} - I_n^{(s)}(\varphi) |f(x) - \bar{P}_n(f, x)|^{s(x)},$$

рассмотрим два случая:

1. Пусть

$$\psi(\xi) = I_n^{(s)}(f) |\varphi(\xi) - P_n^*(\varphi, \xi)|^{s(\xi)} - I_n^{(s)}(\varphi) |f(\xi) - \bar{P}_n(f, \xi)|^{s(\xi)} < 0 \quad (3.3)$$

Вследствие того, что $\varphi^{n+1}(x)$ не обращается в нуль в (a, b) , то разность $\varphi(x) - P_n^*(\varphi, x)$ обращается в нуль только в узлах. Теперь ясно, что $\varphi(\xi) - P_n^*(\varphi, \xi) \neq 0$; так как в противном случае точка $x = \xi$ была бы узлом и, следовательно, мы имели бы $f(\xi) - \bar{P}_n(f, \xi) = 0$, т. е. пришли бы к противоречию с (3.3).

Неравенство (3.3) дает, что

$$I_n^{(s)}(f) / I_n^{(s)}(\varphi) < |f(\xi) - \bar{P}_n(f, \xi)|^{s(\xi)} / |\varphi(\xi) - P_n^*(\varphi, \xi)|^{s(\xi)} \quad (3.4)$$

2. Пусть $\psi(\xi) = 0$. Этот случай, очевидно, будет только тогда, если при некоторой системе узлов $P_n(f, x) = P_n^*(f, x)$ и $P_n(\varphi, x) = P_n^*(\varphi, x)$.

Итак, для этого случая имеем:

$$\psi(\xi) = I_n^{(s)}(f) |\varphi(\xi) - P_n^*(\varphi, \xi)|^{s(\xi)} - I_n^{(s)}(\varphi) |f(\xi) - P_n^*(f, \xi)|^{s(\xi)} = 0$$

Здесь, очевидно, надо рассмотреть такие два случая:

1. Пусть

$$\begin{aligned} \psi(x) = I_n^{(s)}(f) |\varphi(x) - P_n^*(\varphi, x)|^{s(x)} - I_n^{(s)}(\varphi) |f(x) - \\ - P_n^*(f, x)|^{s(x)} \equiv 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выберем теперь такую точку ξ' , что $\varphi(\xi') - P_n^*(\varphi, \xi') \neq 0$. Для этого значения $x = \xi'$ из (3.5) получаем:

$$\frac{I_n^{(s)}(f)}{I_n^{(s)}(\varphi)} = \frac{|f(\xi') - P_n^*(f, \xi')|^{s(\xi')}}{|\varphi(\xi') - P_n^*(\varphi, \xi')|^{s(\xi')}} = \frac{|f^{(n+1)}(\xi')|^{s(\xi')}}{|\varphi^{(n+1)}(\xi')|^{s(\xi')}},$$

так как

$$\frac{f(x) - P_n^*(f, x)}{\varphi(x) - P_n^*(\varphi, x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)} \quad (\text{см. [1], стр. 190}). \quad (3.6)$$

Итак, для этого случая теорема уже доказана.

2. Пусть $\psi(x) \neq 0$. Так как $\psi(\xi) = 0$, то функция $\psi(x)$, очевидно, принимает положительные и отрицательные значения.

Выбирая точку $x=\xi'$ такую, что $\varphi(\xi') < 0$ и рассуждая аналогично предыдущему, мы снова получим (3.4).

Берем теперь такую систему узлов, когда $P_n(f, x) = P_n^*(f, x)$, и через $\bar{P}_n(\varphi, x)$ обозначим полином, соответствующий этой системе узлов.

Аналогично предыдущему получим:

$$\frac{I_n^{(s)}(f)}{I_n^{(s)}(\varphi)} \geq \frac{|f(\xi'') - P_n^*(f, \xi'')|^{s(\xi'')}}{|\varphi(\xi'') - \bar{P}_n(\varphi, \xi'')|^{s(\xi'')}} \quad (3.7)$$

Принимая теперь во внимание непрерывность функции $\varphi^{s(z)}(x, x_0, \dots, x_n)$, а также (3.4), (3.7) и (3.6), приходим к (3.2).

Формула (3.2) аналогичным способом была нами получена для постоянного s (см. [2], стр. 192).

Следствие. Если на интервале (a, b)

$$|f^{(n+1)}(x)| < |\varphi^{(n+1)}(x)|, \text{ то } I_n^{(s)}(f) < I_n^{(s)}(\varphi).$$

Замечание: Утверждение, содержащееся в последнем следствии; можно получить очень просто, дословно применяя соответствующий вывод для постоянного s ([2], стр. 189).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. изд. 2, М., 1954.
2. Ценов И. В. О некоторых вопросах теории приближения функций в пространствах $C[a, b]$ и $L^s[a, b]$. Известия высш. уч. заведений, Математика 1959, № 4.
3. Shahat, The Best Polynomial of functions possessing derivatives. Duke Mathem. Journ., v. 8, 1941, № 2.

А. Е. СЕРЖАНОВ

ПРЯМАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Одна из задач высшей геодезии, так называемая прямая геодезическая задача, формулируется так: даны координаты u_0, v_0 точки В на земном эллипсоиде, азимут A_{BC} геодезической линии ВС и расстояние s_0 между точками В и С; требуется определить координаты u, v точки С и обратный азимут A_{CB} с точки С на точку В.

Эта задача, имеющая большое научное и практическое значение, решается различными методами, в зависимости от того, с какой точностью надо получить результаты, а также в зависимости от расстояния, на которое решается задача.

В настоящей работе рассматривается метод решения прямой геодезической задачи на большие расстояния с большой степенью точности.

Задачу будем решать на эллипсоиде Красовского в системе координат u, v , где u —приведенная широта, а v —долгота точки.

1. Длина кривой s_0 между точками $B(u_0, v_0)$ и $C(u, v)$ на поверхности с ортогональной координацией задается интегралом

$$S_0 = \int_{u_0}^u \sqrt{E + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2} du. \quad (1)$$

В силу экстремальных свойств геодезических линий для подинтегральной функции должно выполняться уравнение Лагранжа—Эйлера:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v'} \right) = 0, \text{ где } \Phi = \sqrt{E + Gv'^2}.$$

Взяв параметрические уравнения поверхности вращения в виде:

$$\begin{aligned}x &= r \cos v, \\y &= r \sin v, \\z &= z(r)\end{aligned}$$

и найдя для нее коэффициенты первой квадратичной формы $E=1+z'^2$, $F=0$, $G=r^2$, мы видим, что для поверхности вращения Φ не зависит от v . Тогда

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v'} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v'} = \text{const.}$$

Дифференцируя Φ по v' , получим:

$$\frac{Gv'}{\sqrt{E+Gv'^2}} = C. \quad (2)$$

Найдем v' :

$$v' = \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G^2 - C^2G}}, \quad dv = \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G^2 - C^2G}} du.$$

Интегрируя, получаем формулу для определения v :

$$v = v_0 + \int_{u_0}^u \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G^2 - C^2G}} du. \quad (3)$$

В (1) вместо $\frac{dv}{du}$ подставим ее значение:

$$S_0 = \int_{u_0}^u \sqrt{\frac{EG}{G - C^2}} du. \quad (4)$$

Получили формулу для определения u .

2. Покажем, что C из (2) есть постоянная Клеро. Для этого линейный элемент поверхности вращения $ds = \sqrt{(1+z'^2)dr^2 + r^2dv^2}$ заменой $(1+z'^2)dr^2 = du^2$ приведем к виду $ds = \sqrt{du^2 + Gdv^2}$, где $G=r^2$ есть функция от u .

Обозначим через α угол геодезической с меридианом, через β — угол геодезической с параллелью, тогда:

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{Edu\delta u + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + Gdv^2} \sqrt{E\delta u^2 + G\delta v^2}}.$$

Так как параллель есть линия $u = \text{const}$, то вдоль нее $\delta u = 0$, тогда

$$\sin \alpha = \frac{Gdv\delta v}{\sqrt{E+G\left(\frac{dv}{du}\right)^2} du \sqrt{G\delta v}} = \frac{Gv'}{\sqrt{E+Gv'^2} \sqrt{G}}$$

или

$$(1) \quad r \sin \alpha = \frac{Gv'}{\sqrt{E+Gv'^2}}.$$

Учитывая (2), получим $r \sin \alpha = c$ (5), т. е. c — постоянная Клеро.

В геодезии угол между меридианом и геодезической линией, отсчитываемый в положительном направлении, называется азимутом. Поэтому теорема Клеро формулируется так: для геодезической линии на поверхности вращения произведение радиуса параллели на синус азимута геодезической линии в той же точке есть величина постоянная.

Так как для эллипсоида вращения $r = a \cos u$, то равенство (5) переписывается в виде $a \cos u \sin \alpha = c$ или $\cos u \sin \alpha = \frac{c}{a} = c_1$ (5'), т. е. произведение косинуса приведенной широты точки геодезической линии на синус азимута геодезической линии в той же точке есть постоянная величина.

3. Возьмем параметрические уравнения эллипсоида вращения в виде:

$$x = a \cos u \cos v,$$

$$y = a \cos u \sin v,$$

$$z = b \sin u.$$

Подсчитав $E = a^2(1 - e^2 \cos^2 u)$, $F = 0$, $G = a^2 \cos^2 u$, где $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, и воспользовавшись формулой (4), получим

$$S_0 = a \int_{u_0}^u \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \cos u}{\sqrt{\cos^2 u - \frac{c^2}{a^2}}} du.$$

Обозначая $\frac{S_0}{a}$ через σ , а $\frac{c}{a}$ через $\cos t$, имеем

$$(11) \quad \sigma = \int_{u_0}^u \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \cos u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du.$$

Введем вспомогательную функцию $z = z(u)$, такую, что

$$(12) \quad \sigma = \int_{u_0}^u \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \cos u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du = z \int_{u_0}^u \frac{\cos u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du, \quad (6)$$

где

$$z = \frac{\int_{u_0}^u \frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u} \cos u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du}{\int_{u_0}^u \frac{\cos u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du}. \quad (7)$$

Из (6)

$$\frac{\sigma}{z} = \int_{u_0}^u \frac{\cos u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du = \arcsin \frac{\sin u}{\sin t} - \omega_0,$$

где

$$\omega_0 = \arcsin \frac{\sin u_0}{\sin t}. \quad (8)$$

Из (8) находим $\sin u$:

$$\sin u = \sin t \sin \left(\frac{\sigma}{z} + \omega_0 \right). \quad (9)$$

Придавая в сомножителе $\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}$ равенства (7) и наибольшее и наименьшее значения, получим

$$\sqrt{1-e^2 \cos^2 u_0} < z < \sqrt{1-e^2 \cos^2 t}. \quad (10)$$

$\sin u$, а следовательно, и u вычислим следующим образом: даем z произвольное значение, заключенное в пределах (10) $z=z_1$, по формуле (9) находим $\sin u_1 = \sin t \sin \left(\frac{\sigma}{z_1} + \omega_0 \right)$; получив приближенное значение u_1 по формуле (7), находим второе приближение $z=z_2$, найдя z_2 , вычислим u_2 , и так далее.

4. Покажем, что мы получили сходящийся процесс. Для этого достаточно показать, что

$$|\sin u_{\kappa+1} - \sin u_{\kappa}| < |\sin u_{\kappa} - \sin u_{\kappa-1}| \Theta, \text{ где } 0 < \Theta < 1. \quad (11)$$

Действительно,

$$\sin u - \sin u_{\kappa} = (\sin u_{\kappa+1} - \sin u_{\kappa}) + (\sin u_{\kappa+2} - \sin u_{\kappa+1}) + \dots$$

Если неравенство (11) выполняется, то

$$\begin{aligned} |\sin u - \sin u_{\kappa}| &< [\Theta^{\kappa-1} + \Theta^{\kappa} + \Theta^{\kappa+1} + \dots] |\sin u_2 - \sin u_1| = \\ &= \frac{\Theta^{\kappa-1}}{1-\Theta} |\sin u_2 - \sin u_1|. \end{aligned} \quad (12)$$

Из неравенства (12) видно, что чем меньше Θ , тем процесс сходится быстрее.

Докажем неравенство (11):

$$\begin{aligned}\sin u_{k+1} - \sin u_k &= \sin t \sin\left(\frac{\sigma}{z_{k+1}} + \omega_0\right) - \sin t \sin\left(\frac{\sigma}{z_k} + \omega_0\right) = \\ &= 2 \sin t \sin\left[\frac{\sigma}{2}\left(\frac{1}{z_{k+1}} - \frac{1}{z_k}\right)\right] \cos\left[\frac{\sigma}{2}\left(\frac{1}{z_{k+1}} + \frac{1}{z_k} + \frac{2\omega_0}{\sigma}\right)\right].\end{aligned}$$

Перейдя к неравенству, получим:

$$|\sin u_{k+1} - \sin u_k| < \sigma \sin t \cdot \left| \frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1} z_k} \right|.$$

Используя неравенство (10), можно написать:

$$|\sin u_{k+1} - \sin u_k| < \sigma \sin t \cdot \frac{|z_{k+1} - z_k|}{1 - e^2 \cos^2 u_0} < \frac{\sigma \sin t}{1 - e^2} |z_{k+1} - z_k|. \quad (13)$$

Оценим $|z_{k+1} - z_k|$. Можно считать, что z есть функция от $\sin u$, тогда по теореме Лагранжа:

$$z_{k+1} - z_k = (\sin u_k - \sin u_{k-1}) \left(\frac{dz}{du} \frac{du}{d \sin u} \right)_{u=\bar{u}_k},$$

где $\bar{u}_k$ заключено между u_k и u_{k-1} .

Обозначая для краткости письма $\varphi(u) = \frac{\cos u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}}$, получим:

$$\begin{aligned}z_{k+1} - z_k &= (\sin u_k - \sin u_{k-1}) \cdot \\ &\cdot \left[\frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \varphi(u) \int_{u_0}^u \varphi(u) du - \varphi(u) \int_{u_0}^u \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \varphi(u) du}{\left(\int_{u_0}^u \varphi(u) du \right)^2 \cos u} \right]_{u=\bar{u}_k}\end{aligned}$$

Вынося за скобку $\frac{\varphi(\bar{u}_k)}{\bar{u}_k}$, находим

$$\cos \bar{u}_k \int_{u_0}^{\bar{u}_k} \varphi(u) du$$

$$z_{K+1} - z_K = (\sin u_K - \sin u_{K-1}) \frac{\varphi(\bar{u}_K)}{\cos \bar{u}_K \int_{u_0}^{\bar{u}_K} \varphi(u) du} \times$$

$$\times \left(\frac{\int_{u_0}^{\bar{u}_K} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \varphi(u) du}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \bar{u}_K} \int_{u_0}^{\bar{u}_K} \varphi(u) du} \right).$$

Вычисляя интеграл $\int_{u_0}^{\bar{u}_K} \varphi(u) du$ и воспользовавшись неравенством (10), получим:

$$|z_{K+1} - z_K| < |\sin u_K - \sin u_{K-1}| \frac{|\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \bar{u}_K} - \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_0}|}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 \bar{u}_K}} \left| \arcsin \frac{\sin \bar{u}_K}{\sin t} - \arcsin \frac{\sin u_0}{\sin t} \right|.$$

Так как

$$\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \bar{u}_K} - \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_0} = \frac{e^2 (\cos^2 u_0 - \cos^2 \bar{u}_K)}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \bar{u}_K} + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_0}} <$$

$$< \frac{e^2}{2\sqrt{1 - e^2}} (\cos^2 u_0 - \cos^2 \bar{u}_K)$$

$$\text{и } \arcsin \frac{\sin \bar{u}_K}{\sin t} - \arcsin \frac{\sin u_0}{\sin t} = \arcsin \left(\frac{\sin \bar{u}_K}{\sin t} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u_0}{\sin^2 t}} - \frac{\sin u_0}{\sin t} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \bar{u}_K}{\sin^2 t}} \right),$$

$$\text{то } -\frac{\sin u_0}{\sin t} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \bar{u}_K}{\sin^2 t}} > \frac{\sin \bar{u}_K}{\sin t} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u_0}{\sin^2 t}} - \frac{\sin u_0}{\sin t} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \bar{u}_K}{\sin^2 t}},$$

$$|z_{K+1} - z_K| < |\sin u_K - \sin u_{K-1}| \cdot \frac{e^2}{2\sqrt{1 - e^2}} \times$$

$$\times \frac{|\cos^2 u_0 - \cos^2 \bar{u}_K|}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 \bar{u}_K} \left| \frac{\sin \bar{u}_K}{\sin t} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u_0}{\sin^2 t}} - \frac{\sin u_0}{\sin t} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \bar{u}_K}{\sin^2 t}} \right|} =$$

$$= |\sin u_K - \sin u_{K-1}| \cdot \frac{e^2}{2\sqrt{1 - e^2}} \times$$

$$\times \frac{|\cos^2 u_0 - \cos^2 \bar{u}_K| \cdot |\sin \bar{u}_K \sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u_0} + \sin u_0 \sqrt{\sin^2 t - \sin^2 \bar{u}_K}|}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 \bar{u}_K} |\sin^2 \bar{u}_K - \sin^2 u_0|} =$$

$$= |\sin u_K - \sin u_{K-1}| \cdot \frac{e^2}{2\sqrt{1-e^2}} \cdot \left| \sin u_0 + \frac{\sin \bar{u}_K \sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u_0}}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 \bar{u}_K}} \right|.$$

Но $\sin \bar{u}_K = \sin t \sin\left(\frac{\sigma}{z_K} + \omega_0\right)$, тогда

$$|z_{K+1} - z_K| < |\sin u_K - \sin u_{K-1}| \cdot \frac{e^2}{2\sqrt{1-e^2}} \cdot \left| \sin u_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin t \sin\left(\frac{\sigma}{z_K} + \omega_0\right) \sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u_0}}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 t \sin^2\left(\frac{\sigma}{z_K} + \omega_0\right)}} \right| =$$

$$= |\sin u_K - \sin u_{K-1}| \cdot \frac{e^2}{2\sqrt{1-e^2}} \cdot \left| \sin u_0 + \sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u_0} \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{z_K} + \omega_0\right) \right|.$$

учитывая (10), получим:

$$|z_{K+1} - z_K| < |\sin u_K - \sin u_{K-1}| \cdot \frac{e^2}{2\sqrt{1-e^2}} \left| \sin u_0 + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u_0} \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{1-e^2 \cos^2 u_0} + \omega_0\right) \right|.$$

Возвращаясь к (13), видим, что

$$|\sin u_{K+1} - \sin u_K| < |\sin u_K - \sin u_{K-1}| \cdot \Theta, \text{ где}$$

$$\Theta = \frac{e^2 \sigma \sin^2 t}{2\sqrt{1-e^2}(1-e^2)} \left| \sin u_0 + \sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u_0} \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{1-e^2 \cos^2 u_0} + \omega_0\right) \right|.$$

5. Если в последней формуле $\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{1-e^2 \cos^2 u_0} + \omega_0\right)$

окажется очень большим, то сходимость будет или очень медленной, или же получим расходящийся процесс. Тогда поступим следующим образом: вычислим

$$s_t = a \int_{u_0}^t \frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u} \cos u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du$$

и находим

И
О (R) 7-10-11-12-13-14-15-16-17-18-19-20-21-22-23-24-25-26-27-28-29-30-31-32-33-34-35-36-37-38-39-40-41-42-43-44-45-46-47-48-49-50-51-52-53-54-55-56-57-58-59-60-61-62-63-64-65-66-67-68-69-70-71-72-73-74-75-76-77-78-79-80-81-82-83-84-85-86-87-88-89-90-91-92-93-94-95-96-97-98-99-100-101-102-103-104-105-106-107-108-109-110-111-112-113-114-115-116-117-118-119-120-121-122-123-124-125-126-127-128-129-130-131-132-133-134-135-136-137-138-139-140-141-142-143-144-145-146-147-148-149-150-151-152-153-154-155-156-157-158-159-160-161-162-163-164-165-166-167-168-169-170-171-172-173-174-175-176-177-178-179-180-181-182-183-184-185-186-187-188-189-190-191-192-193-194-195-196-197-198-199-200-201-202-203-204-205-206-207-208-209-210-211-212-213-214-215-216-217-218-219-220-221-222-223-224-225-226-227-228-229-230-231-232-233-234-235-236-237-238-239-240-241-242-243-244-245-246-247-248-249-250-251-252-253-254-255-256-257-258-259-260-261-262-263-264-265-266-267-268-269-270-271-272-273-274-275-276-277-278-279-280-281-282-283-284-285-286-287-288-289-290-291-292-293-294-295-296-297-298-299-300-301-302-303-304-305-306-307-308-309-310-311-312-313-314-315-316-317-318-319-320-321-322-323-324-325-326-327-328-329-330-331-332-333-334-335-336-337-338-339-340-341-342-343-344-345-346-347-348-349-350-351-352-353-354-355-356-357-358-359-360-361-362-363-364-365-366-367-368-369-370-371-372-373-374-375-376-377-378-379-380-381-382-383-384-385-386-387-388-389-390-391-392-393-394-395-396-397-398-399-400-401-402-403-404-405-406-407-408-409-410-411-412-413-414-415-416-417-418-419-420-421-422-423-424-425-426-427-428-429-430-431-432-433-434-435-436-437-438-439-440-441-442-443-444-445-446-447-448-449-450-451-452-453-454-455-456-457-458-459-460-461-462-463-464-465-466-467-468-469-470-471-472-473-474-475-476-477-478-479-480-481-482-483-484-485-486-487-488-489-490-491-492-493-494-495-496-497-498-499-500-501-502-503-504-505-506-507-508-509-510-511-512-513-514-515-516-517-518-519-520-521-522-523-524-525-526-527-528-529-530-531-532-533-534-535-536-537-538-539-540-541-542-543-544-545-546-547-548-549-550-551-552-553-554-555-556-557-558-559-560-561-562-563-564-565-566-567-568-569-570-571-572-573-574-575-576-577-578-579-580-581-582-583-584-585-586-587-588-589-590-591-592-593-594-595-596-597-598-599-600-601-602-603-604-605-606-607-608-609-610-611-612-613-614-615-616-617-618-619-620-621-622-623-624-625-626-627-628-629-630-631-632-633-634-635-636-637-638-639-640-641-642-643-644-645-646-647-648-649-650-651-652-653-654-655-656-657-658-659-660-661-662-663-664-665-666-667-668-669-670-671-672-673-674-675-676-677-678-679-680-681-682-683-684-685-686-687-688-689-690-691-692-693-694-695-696-697-698-699-700-701-702-703-704-705-706-707-708-709-710-711-712-713-714-715-716-717-718-719-720-721-722-723-724-725-726-727-728-729-730-731-732-733-734-735-736-737-738-739-740-741-742-743-744-745-746-747-748-749-750-751-752-753-754-755-756-757-758-759-760-761-762-763-764-765-766-767-768-769-770-771-772-773-774-775-776-777-778-779-780-781-782-783-784-785-786-787-788-789-790-791-792-793-794-795-796-797-798-799-800-801-802-803-804-805-806-807-808-809-810-811-812-813-814-815-816-817-818-819-820-821-822-823-824-825-826-827-828-829-830-831-832-833-834-835-836-837-838-839-840-841-842-843-844-845-846-847-848-849-850-851-852-853-854-855-856-857-858-859-860-861-862-863-864-865-866-867-868-869-870-871-872-873-874-875-876-877-878-879-880-881-882-883-884-885-886-887-888-889-890-891-892-893-894-895-896-897-898-899-900-901-902-903-904-905-906-907-908-909-910-911-912-913-914-915-916-917-918-919-920-921-922-923-924-925-926-927-928-929-930-931-932-933-934-935-936-937-938-939-940-941-942-943-944-945-946-947-948-949-950-951-952-953-954-955-956-957-958-959-960-961-962-963-964-965-966-967-968-969-970-971-972-973-974-975-976-977-978-979-980-981-982-983-984-985-986-987-988-989-990-991-992-993-994-995-996-997-998-999-1000-1001-1002-1003-1004-1005-1006-1007-1008-1009-1010-1011-1012-1013-1014-1015-1016-1017-1018-1019-1020-1021-1022-1023-1024-1025-1026-1027-1028-1029-1030-1031-1032-1033-1034-1035-1036-1037-1038-1039-1040-1041-1042

Обозначая $\sim = a$ и поступая как в § 3, получим:

(V I - e ^ { \wedge } 82 Д С О У И ^

У Т Ч А И

й и =)

С О 5 И

У Ш А Ж

й а ' Г д е

$$I = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{1 - \cos 5r \cos 3\theta}{\sqrt{8\pi}} \quad (14)$$

$$T_{-}^{\Gamma} \quad \frac{C0811}{2} \quad - \quad \frac{*}{2} \quad a / T_{51}^{81111} \Pi \wedge y'$$

отсюда

$$31\pi = 3\tau < 31\pi (| - - 1) = 3\tau^{\wedge} \cos 3^{\wedge} - \quad (15)$$

Давая 2 произвольное значение, заключенное в пределах (11)) по формуле (15) находим $z_{1\text{пл}} = 5\tau / +\cos\alpha$, определив приближенное значение α по формуле (14), вычисляем второе приближение $\tau = \tau_2$ и т. д. Проводя вычисления, аналогичные проделанным в § 4, легко показать, что

$$|31\pi_{\text{Ж}+1} - 81\pi_{\text{И}K}| < |\pi_{\text{И}K} - 31\pi_{\text{И}K-1}| \text{ в, где } \text{в} = \frac{\pi_{\text{И}K} - \pi_{\text{И}K-1}}{\pi_{\text{И}K-1} - \pi_{\text{И}K-2}}$$

В этом случае процесс всегда сходится.

6. Для вычисления δa — $\frac{C}{y} \frac{e^2 \cos \theta}{81\pi^2} \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}$ и разложим $\Gamma(1-\frac{1}{2})$ в ряд по степеням $\frac{1}{2}$.

в ряд по степеням $e^2 \cos^2 \theta$.

Получим:

$$(-1 - e^2 \cos^2 \theta)^{-1} = 1 - e^2 \cos^2 \theta - ye^4 \cos^4 \theta - \wedge e^6 \cos^6 \theta + \dots +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}-(n-1))}{n!} (-e^2 \cos^2 u)^n + \dots \quad (16)$$

Из формулы (16) видно, что все члены, кроме первого, отрицательны:

$$s = a \left[\int_{u_0}^u \frac{\cos u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du - \frac{1}{2} e^2 \int_{u_0}^u \frac{\cos^3 u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du - \right. \\ \left. - \frac{1}{8} e^4 \int_{u_0}^u \frac{\cos^5 u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du + \dots \right. \\ \left. + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}-(n-1))(-e^2)^n}{n!} \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2n+1} u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du + \dots \right] \quad (17)$$

Обозначим через s_n первые $n+1$ члены ряда (17).

Оценим разность $s_n - s$:

$$s_n - s = a \left[- \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!} (-e^2)^{n+1} \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2(n+1)+1} u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du - \right. \\ \left. - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}-n)(\frac{1}{2}-(n+1))}{(n+2)!} (-e^2)^{n+2} \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2(n+1)+1} u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du - \dots \right] = \\ = -a \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!} (-e^2)^{n+1} \left[\int_{u_0}^u \frac{\cos^{2(n+1)+1} u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du + \right. \\ \left. + \frac{\frac{1}{2}-(n+1)}{n+2} (-e^2) \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2(n+2)+1} u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du - \dots \right].$$

Так как $\int_{u_0}^u \frac{\cos u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du > \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2K+1} u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du$ и коэффициенты при e^{2K} меньше единицы, то, переходя к неравенству, получим:

$$s_n - s < -a \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!} (-e^2)^{n+1} \int_{u_0}^u \frac{\cos u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du [1 + e^2 + e^4 + \dots],$$

а так как $\int_{u_0}^u \frac{\cos u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du < \pi$, то окончательно получаем

$$s_n - s < -a \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2} - n \right)}{(n+1)!} (-e^2)^{n+1} \frac{1}{1-e^2} \pi.$$

Вычисляя интеграл (17), можно ограничиться четырьмя членами разложения.

Действительно, при четырех членах $s_3 - s < a \frac{5}{125} e^8 \frac{1}{1-e^2} \pi$, а так как для эллипсоида Красовского $a = 6\,378\,245$ м и $e^2 = 0,006\,693\,4216$, то $s_3 - s < 1,6$ мм; т. е. величина, которой можно пренебречь.

7. Координата v вычисляется по формуле (3):

$$v = v_0 + \cos t \int_{u_0}^u \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\cos u \sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du,$$

и вычислено в § 3.

Разлагая $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}$ по степеням $e^2 \cos^2 u$ и ограничиваясь четырьмя членами разложения, получим:

$$v = v_0 + \cos t \left[\int_{u_0}^u \frac{du}{\cos u \sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} - \frac{1}{2} e^2 \int_{u_0}^u \frac{\cos u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du - \right. \\ \left. - \frac{1}{8} e^4 \int_{u_0}^u \frac{\cos^3 u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du - \frac{1}{16} e^6 \int_{u_0}^u \frac{\cos^5 u}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u}} du \right].$$

При этом, приводя рассуждения, аналогичные § 6, можно показать, что ошибка не превысит $0'',000052$. Зная u , по формуле (5') находим $\sin a$, следовательно, и обратный азимут геодезической ВС.

9. Вычисляя интегралы, стоящие в выражении (17) и (18), и группируя соответствующим образом члены, получим:

$$s = a \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{8} e^4 - \frac{1}{16} e^6 \right) + \left(\frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + \frac{3}{32} e^6 \right) \sin^2 t - \right. \right. \\ \left. - \left(\frac{3}{64} e^4 + \frac{9}{128} e^6 \right) \sin^4 t + \frac{5}{256} e^6 \sin^6 t \right] \arcsin \frac{\sin u}{\sin t} \Big|_{u_0}^u + \left[\left(-\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{8} e^4 - \frac{3}{32} e^6 \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{64} e^4 + \frac{9}{128} e^6 \right) \sin^2 t - \left(\frac{5}{256} e^6 \sin^4 t \right) \sin u \sqrt{\sin^2 t - \sin^2 u} \Big|_{u_0}^u + \left[\left(\frac{1}{32} e^4 + \frac{3}{64} e^6 \right) - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{5}{384}e^6\sin^2t \Big] \sin^3u \sqrt{\sin^2t - \sin^2u} \Big|_{u_0}^u - \frac{1}{96}e^6\sin^5u \sqrt{\sin^2t - \sin^2u} \Big|_{u_0}^u \Big\}; \\
v = & v_0 + \operatorname{arctg} \frac{\cos t \sin u}{\sqrt{\sin^2t - \sin^2u}} \Big|_{u_0}^u + \cos t \Big\{ \left(-\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 \right) + \\
& + \frac{1}{16}(e^4 + e^6)\sin^2t - \frac{3}{128}e^6\sin^4t \Big] \operatorname{arcsin} \frac{\sin u}{\sin t} \Big|_{u_0}^u + \left[-\frac{1}{16}(e^4 + e^6) + \right. \\
& \left. + \frac{3}{128}\sin^2t \Big] \sin u \sqrt{\sin^2t - \sin^2u} \Big|_{u_0}^u + \frac{e^6}{64} \sin^3u \sqrt{\sin^2t - \sin^2u} \Big|_{u_0}^u \Big\}.
\end{aligned}$$

Так как для эллипсоида Красовского $a=6\,378\,245$ м,
то окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
s = & a \Big[(0,996\,647\,670\,2 + 0,001\,678\,983\,8 \sin^2t - 0,000\,002\,121\,2 \sin^4t + \\
& + 0,000\,000\,005\,9 \sin^6t) \operatorname{arcsin} \frac{\sin u}{\sin t} \Big|_{u_0}^u + (-0,001\,678\,983\,8 + \\
& + 0,000\,002\,121\,2 \sin^2t - 0,000\,000\,005\,9 \sin^4t) \sqrt{\sin^2t - \sin^2u} \Big|_{u_0}^u + \\
& + (0,000\,001\,414\,1 - 0,000\,000\,003\,9 \sin^2t) \sin^3u \sqrt{\sin^2t - \sin^2u} \Big|_{u_0}^u - \\
& - 0,000\,000\,003\,1 \sin^5u \sqrt{\sin^2t - \sin^2u} \Big|_{u_0}^u \Big]; \\
v = & v_0 + \operatorname{arctg} \frac{\cos t \sin u}{\sqrt{\sin^2t - \sin^2u}} \Big|_{u_0}^u + \cos t \Big[(-0,003\,352\,329\,8 + \\
& + 0,000\,002\,818\,9 \sin^2t - 0,000\,000\,007\,0 \sin^4t) \operatorname{arcsin} \frac{\sin u}{\sin t} \Big|_{u_0}^u + \\
& + (-0,000\,002\,818\,9 + 0,000\,000\,007\,0 \sin^2t) \sin u \sqrt{\sin^2t - \sin^2u} \Big|_{u_0}^u + \\
& + 0,000\,000\,004\,7 \sin^3u \sqrt{\sin^2t - \sin^2u} \Big|_{u_0}^u \Big].
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Багратуни Г. Руководство и таблицы для решения прямой и обратной геодезических задач. Труды центрального НИИ геодезии, аэрофотосъемки и картографии, вып. 93, 1952.
2. Закатов П. С. Курс высшей геодезии. Геодезиздат, 1953.

Ф. А. КОРШАК

НАЗЕМНАЯ ЩЕЛЕВАЯ ФОТОГРАММЕТРИЧЕСКАЯ СЪЕМКА

1. Вводные замечания

Мысль о наземном фотографировании плоским световым пучком возникла вскоре после изобретения фотографии. В разное время для этой цели были построены аппараты: пантоскопическая камера [8 9], циклограф Дамуазо [8], цилиндрограф Моэссара [6] и др.

В последнее время эта идея была воплощена В. С. Семеновым в аппаратах для панорамных щелевых съемок (Щафацикл-21 и др.) [7].

Несмотря на то, что фотографированием при помощи плоского светового пучка занимаются давно, геометрическая структура получаемой при этом проекции оставалась почти не исследованной, судя по опубликованным на эту тему работам [3, 1]. Между тем практически использовать снимки для измерительных целей, т. е. как фотограмметрические, можно лишь в том случае, когда известна математическая зависимость между объектом съемки и его изображением на фотоснимке.

Отсутствие исследований по теории щелевой фотограмметрии объясняется, по-видимому, тем, что геометрическую структуру щелевых снимков, полученных плоским световым пучком, считали такой же, как и у кадровых снимков, полученных пространственной связкой лучей, образующих в совокупности световую пирамиду.

Только сравнительно недавно опубликованы работы, относящиеся к теории щелевой аэрофотосъемки, которые раскрывают сущность проекций, получаемых на плоскости при помощи плоского светового пучка, совершающего равномерное поступательное движение в пространстве по горизонтальной прямой [2, 4, 5]. В этих работах, в частности, установлено, что прямая предметного

чей, проходящих через центр его S и через прямую ab , называемую картинным основанием пучка. Прямая oSO , проходящая через центр пучка перпендикулярно картинному основанию, называется главным лучом. Отрезок $oS=f$ главного луча, определяющий расстояние картинного основания от центра пучка, называется картинным расстоянием.

Таким образом, элементами проектирующего пучка являются:

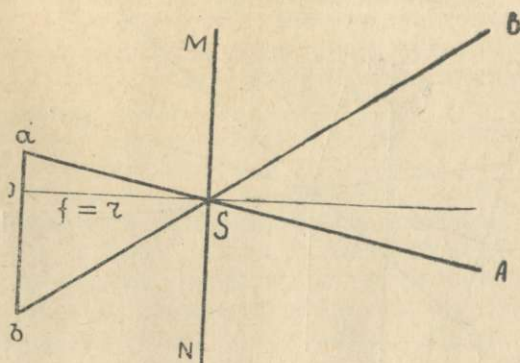


Рис. 2.

1) центр, или вершина пучка S , 2) картинная часть пучка aSb , 3) картинное основание пучка ab , 4) оптическая ось, или главный луч oSO , 5) картинное, или фокусное расстояние $f=oS$, 6) ось вращения пучка MN , 7) радиус вращения картинного основания $r=oT$, 8) радиус вращения центра проекции (вершины пучка) $d=ST$, 9) предметная часть пучка ASB .

В современных фотоаппаратах для наземной щелевой съемки вершиной пучка является центр объектива, главным лучом—оптическая ось аппарата, картинным расстоянием—фокусное расстояние, картинным основанием—щель, перед которой проходит светочувствительная пленка в фокальной плоскости. Длина щели соответствует ширине фотопленки.

Картинная часть проектирующего пучка всегда имеет форму треугольника, обычно равнобедренного. Предметная часть пучка ограничена лучами, идущими от концов щели через центр проекции.

Величина картинного угла $ASB=aSb$ зависит от фокусного расстояния f , от длины щели ab и от положения главной точки o проектирующего пучка относительно концов щели a и b , что видно при сравнении рис. 1 с рис. 2. Наибольшим этот угол будет при $oa=ob$. В зависимости от положения главной точки пучка относительно верхнего и нижнего концов щели, в картинный угол ASB будет по-

падать и проектироваться на пленку та или иная часть предметного пространства. Если при горизонтальной оптической оси объектив фотокамеры установить относительно щели так, чтобы центр его находился в точке S (рис. 2), то на пленку спроектируется больше точек, лежащих выше оптической оси. При других комбинациях центра проекции относительно концов щели границы проектируемого пространства будут иными.

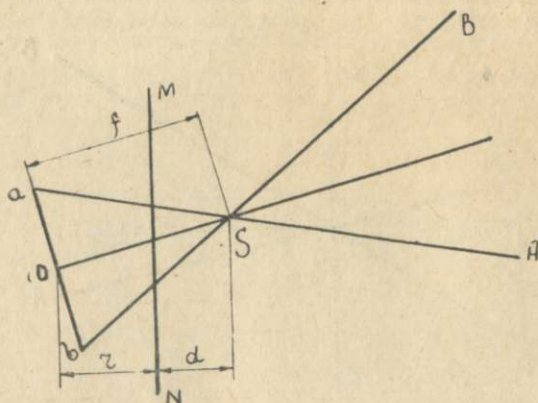


Рис. 3.

Относительно щели и плоскости проектирующего пучка ось вращения (линия MN на рис. 1) может занимать следующие положения: 1) может лежать в плоскости пучка, 2) быть параллельной этой плоскости, 3) пересекать ее. Практически целесообразно брать первый случай расположения оси вращения и в крайнем случае—второй. Во всех перечисленных случаях ось вращения может быть параллельна картинному основанию, находясь в плоскости пучка или вне ее (рис. 1 и 2), пересекать картинное основание или его продолжение, тоже находясь в плоскости пучка или вне ее (рис. 3). Ось вращения и картинное основание могут оказаться скрещивающимися прямыми.

Находясь в плоскости пучка, ось вращения может проходить через центр проекции S или быть смещенной с него в ту или иную сторону на некоторое расстояние d —большее, меньшее или равное f .

Во всех случаях надо знать расстояние r картинного основания пучка или хотя бы главной точки O от оси вращения. Это расстояние характеризует размеры поверхности, образуемой картинным основанием при вращении пучка, а то или иное взаимное расположение картинного основания и оси вращения определяет форму порождаемой поверхности.

Так, например, если картинное основание параллельно оси вращения пучка, то оно описывает цилиндрическую поверхность, радиус которой равен расстоянию r между этими линиями и может быть равен f , быть больше или меньше f .

Если же картинное основание пересекает ось вращения пучка, то оно опишет коническую поверхность. Наконец, если картинное основание и ось вращения будут скрещивающимися прямыми, то образуемая ими поверхность будет однополостный гиперболоид. Последние два случая не представляют практического интереса.

Как бы ни располагалось картинное основание относительно оси вращения, угловая скорость всех его точек будет одинаковой, линейная же скорость этих точек зависит от расстояния каждой из них до оси вращения и будет одинаковой только в том случае, когда картинное основание описывает цилиндрическую поверхность, т. е. когда оно параллельно оси вращения.

Если же расстояния разных точек картинного основания от оси вращения окажутся разными, что имеет место при непараллельности его с этой осью, то при равных угловых скоростях линейные скорости разных точек будут не одинаковыми.

Светочувствительная пленка, перематываемая лентопротяжным механизмом, движется перед щелью (перед картинным основанием) с одинаковой скоростью, последняя во всех точках должна равняться линейной скорости движения картинного основания во избежание смаза изображения. Следовательно, для достижения равенства линейных скоростей пленки и картинного основания ось вращения должна быть параллельна картинному основанию пучка и в то же время занимать вертикальное положение, хотя теоретически можно допустить любое ее расположение, но при этом геометрическая структура получаемого изображения будет более сложной.

3. Простейший случай щелевого проектирования объектов, расположенных в предметном пространстве

Математическая связь между объектом, расположенным в предметном пространстве, и его щелевой проекцией будет наиболее простой, когда ось вращения MN вертикальна и проходит через вершину пучка S , картинное основание которого также вертикально, а оптическая ось, следовательно, горизонтальна (рис. 4). Такой случай будем называть нормальным.

В этом случае проектирование производится на боковую поверхность цилиндра, описываемую картинным основанием пучка при вращении его вокруг оси MN , являющейся одновременно и осью этого цилиндра. Радиус цилиндра r равен картинному расстоянию f . Для дальнейшего использования фотоизображения бо-

ковая поверхность цилиндра, представляющая собою картинную поверхность, разворачивается в плоскость.

Систему координат в предметном пространстве выберем следующим образом. В качестве оси Z возьмем вертикальную прямую, проходящую через вершину проектирующего пучка и, следовательно, совпадающую с осью вращения его, т. е. с осью цилиндра. В направлении этой оси определяют отметки точек: вверх—положительные, вниз—отрицательные. За оси X и Y можно взять любые две взаимно перпендикулярные горизонтальные прямые, проходя-

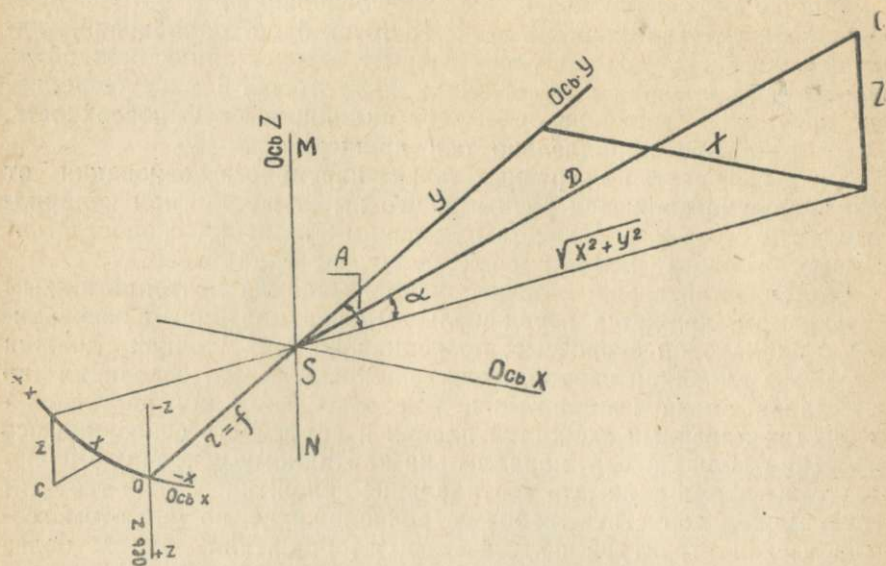


Рис. 4.

щие через вершину пучка. Например, ось Y можно расположить по направлению меридиана, плоскость которого проходит через вершину пучка, а осью X будет прямая восток—запад. Положительные координаты отсчитывают к северу и к востоку.

На картинной поверхности за начало системы цилиндрических прямоугольных координат нужно взять точку O , в которой ось Y пересекает эту поверхность. Тогда осью z будет образующая, проходящая через начало координат, а осью x —окружность, полученная при пересечении картинной цилиндрической поверхности горизонтальной плоскостью, проходящей через вершину пучка, а следовательно, и через оси X и Y предметного пространства. При разворачивании картинной цилиндрической поверхности в плоскость ось x преобразуется в горизонтальную линию, проходящую через начало координат.

Проектирование точек и линий предметного пространства будет происходить следующим образом.

Каждая точка предметного пространства, например, C на рис. 4 изобразится на картинной поверхности точкой (точка c) при помощи соответствующего проектирующего луча. В предметном пространстве положение любой точки определяется прямоугольными (X, Y, Z) или полярными координатами ее. К числу последних относятся: радиус-вектор D , измеряемый по направлению проектирующего луча данной точки, дирекционный угол A и угол

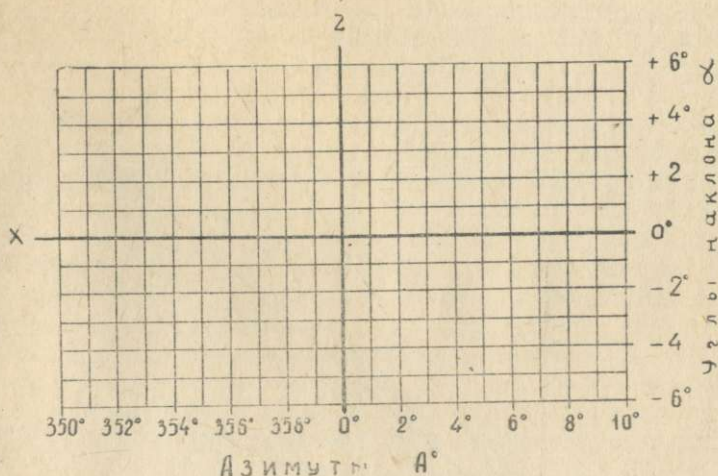


Рис. 5.

наклона α этого луча. На развернутой в плоскость картинной поверхности можно измерить прямоугольные координаты точек x и z , которые связаны с углами α и A следующей зависимостью:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z}{f}, \quad A^0 = \frac{360^\circ}{2\pi f} x.$$

Так как в этих выражениях f —величина постоянная, а $2\pi f$ —длина панорамы, то можно задаться целочисленными значениями α и A и вычислить соответствующие им z и x , затем вычертить на прозрачном материале, например, на кальке сетку, при помощи которой легко определить графически углы α и A непосредственно по снимку. Часть такой сетки показана на рис. 5 для $f = 210$ мм. Наконец, можно построить специальный прибор, основанный на принципе Порро—Коппе, для оптико-механического измерения углов α и A .

Зная x , z и f или A и α , нельзя еще определить пространствен-

Совершенно очевидно, что прямая, совпадающая с направлением какого-либо проектирующего луча, изобразится точкой. Всякая другая прямая предметного пространства, например, CE на рис. 6, будет проектироваться лучами, проходящими через все ее точки и через вершину пучка. Совокупность этих лучей образует проектирующую плоскость ($CESce$ на рис. 6), которая в общем случае, т. е. когда она не вертикальная и не горизонтальная, пересекает картинную цилиндрическую поверхность по дуге эллипса. Из начертательной геометрии известно, что при разворачивании цилиндрической поверхности на плоскости этот эллипс преобразуется в синусоиду. Следовательно, прямые предметного пространства, расположенные в наклонных проектирующих плоскостях (в том числе и горизонтальные прямые), изобразятся в конце концов дугами синусоид разных параметров.

Изображение прямых, расположенных в горизонтальной проектирующей плоскости, совместится с осью x , т. е. получится в виде дуги окружности, а на развертке—в виде прямой. Вертикальные и другие прямые, находящиеся в вертикальных проектирующих плоскостях, изобразятся вертикальными прямыми, совпадающими с образующими картинной цилиндрической поверхности.

Наклонные плоскости, проектирующие прямые общего положения, всегда проходят через центр проекции S и при пересечении с плоскостью круга, содержащего ось x , образуют малую ось эллипса $2b$, равную диаметру этого круга, т. е. $2f$. Длина большой полуоси эллипса a зависит от угла наклона θ проектирующей плоскости, и как видно из рис. 6, может быть вычислена по формуле:

$$a = b : \cos \theta \text{ или } a = f : \cos \theta.$$

Для прямой общего положения можно вычислить угол наклона ее проектирующей плоскости, если известны: A —азимут проектируемой линии, α — угол наклона ее к горизонту, X_K, Y_K, Z_K —координаты какой-либо точки K этой линии.

В самом деле, на рис. 6 видно, что X_0 и Y_0 — координаты точки E , в которой проектируемая линия пересекает горизонтальную координатную плоскость (т. е. когда $Z_0=0$), можно определить по формулам:

$$X_0 = X_K + Z_K \operatorname{ctg} \alpha \cos(A - 90^\circ), \quad Y_0 = Y_K - Z_K \operatorname{ctg} \alpha \sin(A - 90^\circ), \text{ ибо}$$

$$X_0 = EE_2 = X_K + E_1E, \quad E_1E = K_1E \cos(A - 90^\circ), \quad K_1E = Z_K \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$Y_0 = SE_2 = Y_K - E_2K_2, \quad E_2K_2 = E_1K_1 = K_1E \sin(A - 90^\circ), \quad K_1E = Z_K \operatorname{ctg} \alpha.$$

Координаты точки C , в которой проектируемая линия пересекает вертикальную координатную плоскость (когда $X=0$), можно вычислить следующим образом:

$$Y_1 = SC_1 = Y_K + K_2C_1, \quad K_2C_1 = X_K \operatorname{tg}(A - 90^\circ); \quad Z_1 = C_1C = Z_K + C_2C,$$

$$C_2C = C_2K \operatorname{tg} \alpha, \quad C_2K = C_1K_1 = X_K \sec(A - 90^\circ),$$

поэтому $Y_1 = Y_K + X_K \operatorname{tg}(A - 90^\circ)$, $Z_1 = Z_K + X_K \sec(A - 90^\circ) \operatorname{tg} \alpha$.

Из прямоугольного треугольника EE_2S можно составить отношение: $X_0:Y_0 = \operatorname{tg} \lambda$, откуда определяется угол λ , являющийся азимутом линии пересечения проектирующей плоскости с горизонтальной координатной плоскостью. От этого угла зависит величина абсциссы x_b вершины эллипса, лежащей на малой оси, а именно:

$$x_b = \frac{2\pi f}{360^\circ} \lambda,$$

ордината этой вершины $z_b = 0$.

Величина абсциссы x_a вершины эллипса, расположенной на большой оси, равна:

$$x_a = \frac{2\pi f}{360^\circ} (90^\circ - \lambda),$$

а ордината этой вершины z_a может быть вычислена по формуле

$$z_a = a \sin \Theta = f \operatorname{tg} \Theta.$$

Эти же координаты (x_a , z_a , x_b , z_b) будут иметь вершины и точки перегиба синусоиды.

Наконец, угол Θ можно вычислить по формуле:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{Z_1}{Y_1 \sin \lambda}.$$

Приведенные выше формулы можно применять также для общих исследований, касающихся изображения прямых линий. Например, если положить $\alpha = 0$, то вычисления будут относиться к горизонтальным прямым, если взять $A = 0$, то рассуждения будут касаться прямых, перпендикулярных оси X . Задаваясь значениями U и Z , можно выяснить, как изобразятся прямые, находящиеся на разных расстояниях от точки стояния и на разной высоте относительно горизонтальной координатной плоскости.

Весьма важно по линиям, изображенным на проекции, определить, какие геометрические образы могут соответствовать им в предметном пространстве.

Известно, что при разворачивании цилиндрической поверхности в плоскость только следующие линии, расположенные на этой поверхности, преобразуются в прямые: образующие — в вертикальные прямые, дуги окружностей (перпендикулярные образующим) — в горизонтальные прямые, винтовые линии — в наклонные прямые.

На развернутой же в плоскость картинной поверхности вертикальным прямым соответствуют в предметном пространстве как вертикальные линии, так и наклонные прямые, а также кривые линии и любой формы фигуры, расположенные в вертикальных проектирующих плоскостях.

Горизонтальным прямым будут соответствовать кривые линии, как то: окружности, конические сечения, другие линии и фигуры, расположенные на конических поверхностях, которые образованы вращающимся проектирующим лучом, проходящим через окружность, преобразованную при развертывании в горизонтальную прямую.

Наклонным прямым соответствуют кривые линии, лежащие на конической поверхности, образованной проектирующим лучом, у которого направляющей будет цилиндрическая винтовая линия.

Как видно из приведенного анализа, геометрическая структура изображения при щелевом проектировании будет более сложной, чем при центральном проектировании в кадровой съемке, на что было указано в § 1.

Масштаб изображения для различных точек предметного пространства определяется отношением $f:D$, где D — расстояние от оси вращения пучка до точки, масштаб в которой нужно вычислить. Для точек, расположенных на одной и той же цилиндрической поверхности предметного пространства, ось которой совпадает с осью вращения проектирующего пучка, масштаб будет одинаковым и равняется отношению f к радиусу этой поверхности. Разумеется, это справедливо лишь при равенстве скоростей движения картинного основания и светочувствительной пленки. Если это равенство не соблюдено, то для точек, расположенных на одной и той же из упомянутых цилиндрических поверхностей, масштаб будет разным в продольном и поперечном направлениях. Отношение скоростей движения картинного основания и пленки будет равно отношению масштабов в вертикальном и горизонтальном направлениях.

4. Другие случаи щелевого проектирования при горизонтальной оптической оси

Если ось вращения, находясь в плоскости проектирующего пучка и будучи вертикальной, не совпадает с центром проекции, а смещена с него в ту или иную сторону на некоторую величину d , то можно представить себе четыре случая съемки по схемам, изображенным на рис. 7—10. Во всех этих случаях оптическая ось будет горизонтальна и при направлении ее на север принимается за ось X системы координат предметного пространства. Осью Z по-прежнему считают ось вращения пучка, началом координат будет точка пересечения оптической оси с осью вращения.

В первом случае центр проекции S смещен на величину $d < f$ так, что ось вращения MN находится между ним и картинным основанием пучка av (рис. 7). Центр проекции при этом описывает окружность радиуса d , расположенную в горизонтальной плоскости, проходящей через оптическую ось, а картинное основание опи-

сывает цилиндрическую поверхность радиуса r , равного разности $f-d$. Траектории центра проекции и картинного основания показаны в нижней части рис. 7 в виде дуг.

Длина развернутой картинной поверхности (длина панорамы) равна:

$$2\pi(f-d) = 2\pi f - 2\pi d,$$

т. е. она оказывается короче нормальной панорамы, полученной в случае совпадения центра проекции с осью вращения и имеющей длину $2\pi f$. Ширина панорамы остается такой же, как и в нормальном случае. Вследствие этого масштаб в вертикальном направлении (вдоль оси z) не изменится по сравнению с нормальным слу-

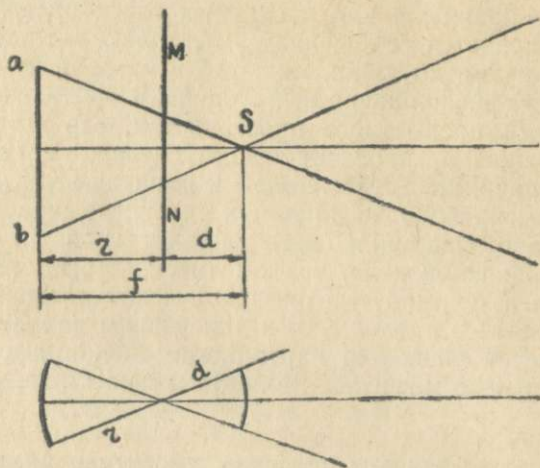


Рис. 7.

чаем и будет равен $f:D$, а в горизонтальном направлении (вдоль оси x) масштаб будет мельче и для тех же точек равен $(f-d):D$. Если изменить (увеличить) скорость передвижения пленки по сравнению с линейной скоростью картинного основания так, чтобы длина панорамы получилась равной $2\pi f$, то масштабы в продольном и поперечном направлениях для точек с одинаковым отстоянием от оси вращения (т. е. лежащих на одной и той же цилиндрической поверхности предметного пространства) будут одинаковыми.

Пленку, как всегда, нужно передвигать в сторону, противоположную направлению движения картинного основания.

Во втором случае центр проекции смещен с оси в ту же сторону, что и в первом случае, на величину $d > f$ и движется по окружности радиуса d , расположенной в горизонтальной плоскости (рис.

8). Картинное основание ab окажется между осью вращения MN и центром проекции S и опишет цилиндрическую поверхность радиуса r , величина которого равна разности $d-f$. Длина панорамы определяется из выражения:

$$2\pi(d-f) = 2\pi d - 2\pi f,$$

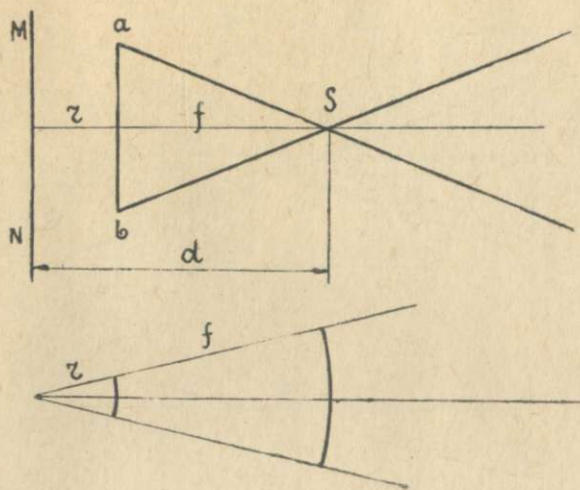


Рис. 8.

и при $d > 2f$ окажется длиннее, при $d < 2f$ короче, а при $d = 2f$ будет такая же, как и в нормальном случае. Сравнительно с поперечным продольный масштаб панорамы для одних и тех же точек предметного пространства будет соответственно крупнее, мельче или одинаковым. Для соблюдения равенства масштабов нужно регулировать движение пленки.

Направление движения картинного основания, как видно на нижней части рис. 8, совпадает с направлением движения центра проекции, при этом проектирование происходит уже не на внутреннюю поверхность цилиндра, как в предыдущем случае, а на наружную.

В третьем случае центр проекции S смещен на любую величину d ($d < f$, $d = f$, $d > f$), располагается между картинным основанием ab и осью вращения MN пучка и движется по горизонтальной окружности радиуса d (рис. 9). Картинное основание опишет цилиндрическую поверхность, радиус которой r равен сумме $f+d$. Длина панорамы равна:

$$2\pi(f+d) = 2\pi f + 2\pi d$$

и всегда будет больше нормальной, поэтому продольный масштаб для одних и тех же точек крупнее поперечного. Равенства масштабов можно достигнуть, если уменьшить скорость движения пленки по сравнению с линейной скоростью движения картинного основания так, чтобы длина панорамы получилась равной $2\pi f$.

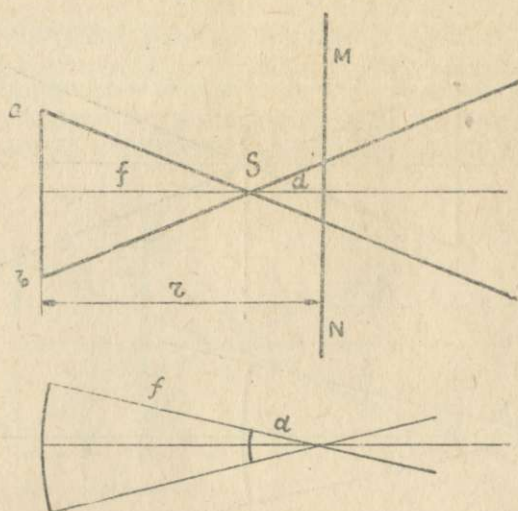


Рис. 9.

В четвертом случае центр проекции S смещен на величину $d=f$ так, что ось вращения MN совпадает с картинным основанием пучка av и оно остается неподвижным, в то время как центр проекции движется по окружности радиуса $d=f$ (рис. 10). Проектирование при этом будет произведено не на поверхность, а на прямую линию. Панораму, и притом одномасштабную, для одних и тех же точек все же можно получить, если перед щелью передвигать светочувствительную пленку так, чтобы она прошла участок $2\pi f$ за время полного оборота центра проекции. Геометрически проектирование будет происходить на плоскость, вращающуюся вокруг картинного основания пучка и одновременно передвигающуюся перпендикулярно оптической оси.

В рассмотренных четырех случаях проектирующие лучи проходят через ось вращения пучка и через траекторию центра проекции, являющуюся всегда окружностью.

Точки, а также прямые, совпадающие с направлением проектирующего луча, изобразятся точками. Все, что совпадает с плоскостью проектирующего пучка (вертикальные и наклонные прямые, кривые линии, любые фигуры), изобразится в виде верти-

кальной прямой. Горизонтальные прямые и другие линии и фигуры, расположенные в плоскости движения оптической оси, изображаются горизонтальными прямыми, совпадающими с осью x картинной поверхности.

Линии и фигуры, лежащие на конической поверхности, образованной одним и тем же проектирующим лучом, изображаются прямыми, параллельными оси x .

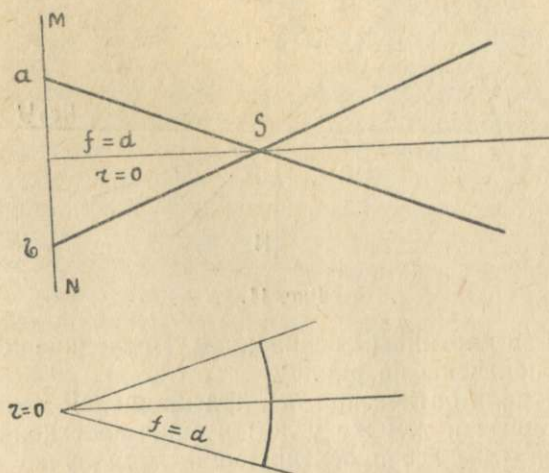


Рис. 10.

Прямые, произвольно ориентированные, а также все горизонтальные прямые, не лежащие в плоскости вращения оптической оси, будут проектироваться совокупностью лучей, проходящих через данную прямую, ось вращения пучка и траекторию центра проекции. В результате образуется сложная линейчатая проектирующая поверхность, называемая в начертательной геометрии косым цилиндром о трех направляющих. Эта поверхность тем больше отличается от плоскости, чем дальше смещен центр проекции с оси вращения. В пересечении с картинной поверхностью такая проектирующая поверхность даст кривую, близкую по форме к дуге эллипса, а в развернутом виде эта кривая будет близка к дуге синусоиды.

5. Щелевое проектирование при наклонной оптической оси

Ось вращения проектирующего пучка, находясь в плоскости последнего и будучи вертикальной, может составлять с оптической осью угол β , отличный от 90° . Относительно центра проекции S и картинного основания av ось вращения MN может располагаться

следующим образом: 1) проходить через центр проекции,—это наиболее простой случай, показанный на рис. 11; 2) находиться перед центром проекции на любом расстоянии от него; 3) находиться между центром проекции и картинным основанием, не пересекая последнего; 4) пересекать картинное основание в любом месте;

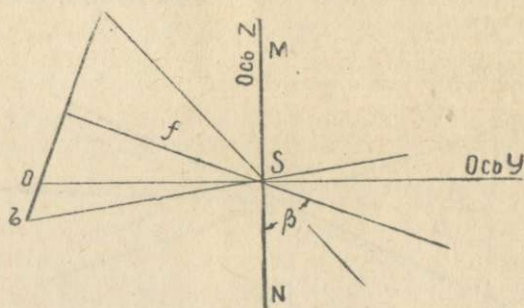


Рис. 11.

5) находиться за картинным основанием. Последние четыре случая схематически показаны на рис. 12.

Во всех случаях оптическая ось при вращении наклонена к горизонту под одним и тем же углом и описывает коническую поверхность. При этом все проектирующие лучи пучка и картинное основание его также описывают конические поверхности. Следовательно, линейная скорость разных точек картинного основания окажется разной и будет зависеть от расстояния их до оси враще-

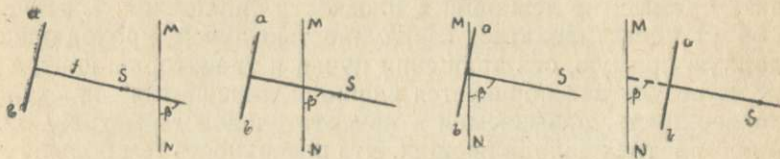


Рис. 12.

ния пучка. В связи с этим линейная скорость движения, изображенная в разных точках картинного основания, также будет разной. Светочувствительная пленка, принимаемая за картинную поверхность, движется с постоянной скоростью по всей ширине. Поэтому, хотя картинное основание описывает коническую поверхность, проектирование в действительности происходит на цилиндрическую поверхность, имеющую радиус, равный расстоянию той точки картинного основания от оси вращения, в которой линейная скорость равна скорости движения пленки.

Именно в этой точке продольный масштаб изображения будет

равен поперечному масштабу его, в то время как в других точках, расположенных выше или ниже данной, масштаб соответственно будет мельче или крупнее.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда центр проекции S находится на оси вращения пучка MN (рис. 11). За ось Y примем горизонтальную прямую, проходящую через центр проекции S и лежащую в плоскости истинного меридиана. Горизонтальную прямую, перпендикулярную Y в точке S , возьмем в качестве оси X . Ось вращения MN совпадает тогда с координатной осью Z .

В картинной плоскости, в которую развернется цилиндрическая поверхность, за начало координат примем точку пересечения ее с осью Y . Вертикальная прямая, проходящая через начало координат, будет осью z , а горизонтальная—осью x .

Линии предметного пространства, совпадающие с плоскостью проектирующего пучка, изобразятся вертикальными прямыми. Линии, совпадающие с плоскостью XSY , изображаются на оси xx . Совокупность лучей, проектирующих прямые произвольного ориентирования, образует плоскость, проходящую через центр проекции и данную прямую и пересекающую картинную цилиндрическую поверхность по дуге эллипса.

После развертывания в плоскость получится дуга синусоиды, как и в случаях, рассмотренных в предыдущих параграфах.

Таким образом, тот факт, что разные точки картинного основания движутся с разной скоростью, а светочувствительная пленка—с одинаковой, приводит нас к случаю проектирования на цилиндрическую поверхность, ось которой совпадает с осью вращения пучка, а радиус равен расстоянию от оси вращения той точки картинного основания, линейная скорость которой равна линейной скорости движения пленки. Имея это в виду, все остальные случаи можно свести к рассмотренным выше случаям проектирования на цилиндрическую поверхность.

6. Щелевая стереофотограмметрическая съемка

Для получения всех трех координат какой-либо точки предметного пространства, например, точки C на рис. 13, нужно сфотографировать ее с концов L и R базиса, длина которого B известна. За начало пространственной системы координат примем центр проекции в одном из концов базиса, например, в левом. Осью X будет горизонтальная прямая, расположенная в вертикальной плоскости, проходящей через базис, а осью Y — перпендикулярная к оси X горизонтальная прямая. В качестве оси Z по-прежнему принимают вертикальную прямую, проходящую через начало координат. На рис. 13 сплошными линиями показана схема фотографирования точки C , ортогонально спроектированная на горизонтальную ко-

ординатную плоскость $Y LX$, поэтому ось Z на этом рисунке изображена точкой L .

На первой цилиндрической проекции с центром в точке L началом координат будет точка O_1 , в которой ось Y пересекает картинную поверхность. На второй проекции начало координат находится в точке O_2 , в которой пересекает картинную поверхность горизонтальная прямая, проходящая через центр проекции R перпендикулярно базису LR .

Из треугольника C_1LR по теореме синусов можно написать:

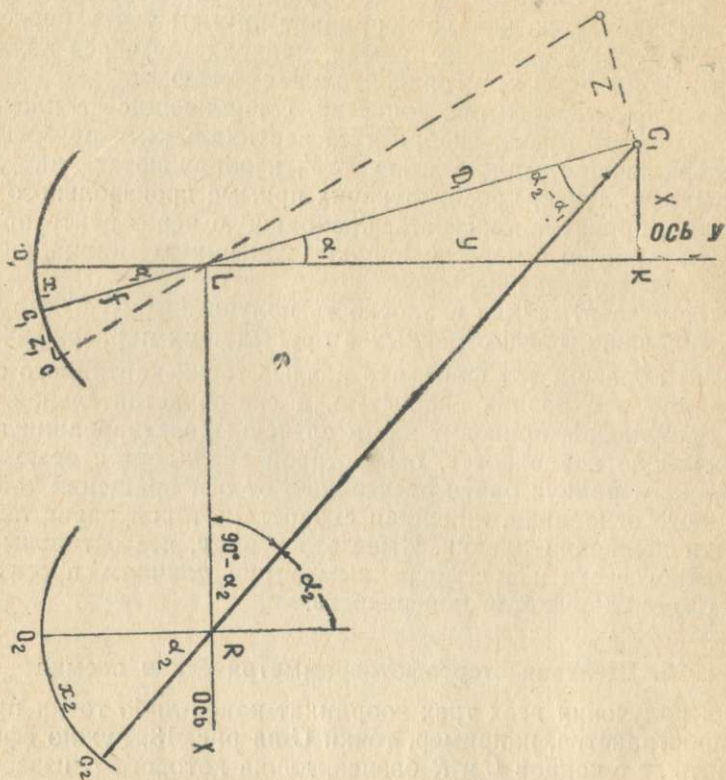


Рис. 13.

$$\frac{D_1}{B} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha_2)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \text{ откуда } D_1 = B \frac{\cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \text{ где } D_1 = C_1L.$$

Из прямоугольного треугольника C_1KL по гипотенузе D_1 и углу α_1 можно определить катеты $X=CK$ и $Y=LK$ по формулам:

$$X = D_1 \sin \alpha_1 = B \frac{\cos \alpha_2 \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad Y = D_1 \cos \alpha_1 = B \frac{\cos \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

На рис. 13 штриховыми линиями показаны подобные прямоугольные треугольники CC_1L и cc_1L . Эти треугольники были расположены в вертикальной проектирующей плоскости, проходящей через точку C предметного пространства и содержащей координату $Z=C_1C$ данной точки и координату $z_1=c_1c$ ее изображения c на картинной поверхности. Затем проектирующая плоскость повернута вокруг линии C_1Lc_1 до совмещения с горизонтальной координатной плоскостью $Y LX$ и в результате получилось то, что изображено штриховыми линиями. Прямая CLc является проектирующим лучом точки C .

Из подобия треугольников CC_1L и cc_1L следует:

$$Z:D_1=z_1:f, \text{ откуда } Z=D_1 \frac{z_1}{f} = B \frac{z_1}{f} \frac{\cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

Остается выяснить, как определить величины, входящие в правую часть формул для вычисления D_1 , X , Y , Z .

Длину базиса B измеряют на местности, фокусное расстояние f указано в аттестате фотоаппарата, углы α_1 и α_2 вычисляют по формулам $\alpha_1 = \frac{360^\circ}{2\pi f} x_1$, $\alpha_2 = \frac{360^\circ}{2\pi f} x_2$, координаты $x_1 = O_1C_1$, $x_2 = O_2C_2$, $z_1 = c_1c$ измеряют на снимках.

О знаках координат было указано в предыдущих параграфах; что же касается углов α , то положительные направления следует считать по ходу часовой стрелки от оси Y до проектирующего луча, тогда алгебраические значения разностей углов α надо брать так: $\alpha_1 - \alpha_2$. В зависимости от знака этой разности получится тот или иной знак координаты X .

Координаты точки C можно определить и графическим способом, отложив в каком-либо масштабе величину горизонтальной проекции базиса B и руководствуясь схемой, изображенной на рис. 13. Координаты таким способом будут получены в масштабе базиса.

Прибора для точных измерений координат точек на снимках нет, однако его можно построить по типу стереокомпаратора. По частям можно вести обработку щелевых снимков и на существующих стереокомпараторах.

7. Аппаратура для наземной щелевой съемки

Модель первой щелевой панорамической камеры была представлена Араго в Парижскую академию наук в 1847 г. [9]. При помощи этой камеры Мартенс снимал виды на серебряные пластинки, имевшие форму полуцилиндров. Затем Мартенс изменил прибор, приспособив его для съёмки на плоское стекло, покрытое светочувствительным слоем. Вся камера вращалась вокруг вертикаль-

ного стержня, укрепленного под объективом. В стенке камеры, противоположной объективу, была сделана вертикальная щель, перед которой, по мере поворота камеры, передвигалось стекло со светочувствительным слоем. Стекло передвигалось в сторону, обратную направлению вращения камеры.

В № 31 журнала «Фотографическое обозрение» за 1866 год имеется сообщение о пантоскопической камере англичан Джонсона и Гаррисона, при помощи которой можно производить щелевую съёмку панорам на светочувствительную пластинку. Вращение камеры производилось часовым механизмом.

На Парижской всемирной выставке в 1889 году был показан топографический цилиндриграф Моэссара [6]. В передней части этого прибора на вертикальной оси укреплен объектив так, что в случае надобности его можно поднять или опустить для съёмки предметов, расположенных соответственно выше или ниже горизонтальной оптической оси. Задняя стенка камеры имеет форму полуцилиндра, куда вставляется гибкая кассета, заряженная светочувствительной пленкой или бумагой. Геометрическая ось этого полуцилиндра совмещена с осью вращения объектива. Весь аппарат укрепляется на штативе, наверху он имеет два цилиндрических уровня, буссоль и диоптры, прикрепленные к оси вращения объектива. Визируя через диоптры в двух крайних положениях их, можно определить границы территории, фотографируемой на один снимок.

Полезная площадь снимка охватывает панораму в 170° . На снимке отпечатываются рамка, разделенная на миллиметры, высота центра объектива, направление и название стран света. К оси вращения объектива наглухо присоединена тонкая прямоугольная коробка, определяющая ширину щели и фиксирующая положение светового проектирующего пучка, ибо лучи света, идущие через объектив, попадают на картинную поверхность только через эту коробку.

Во время экспонирования камера неподвижна, а диоптры поворачивают от руки из одного крайнего положения в другое. Вместе с диоптрами поворачивается объектив и присоединенная к нему коробка со щелью. Ширина щели 5 мм.

Один экземпляр цилиндриграфа Моэссара был приобретен военно-инженерным ведомством, которое и производило съёмки, однако отчет об этих работах не опубликован, поэтому нельзя сказать, насколько успешными были съёмки.

Примерно в то же время, т. е. около 1890 года, появился циклограф Дамуазо для щелевой съёмки панорам в 360° [6].

Этот прибор прикреплен к вертикальной оси вращения, проходящей через узловую точку объектива. На головке штатива укреплено зубчатое колесо, во втулку которого свободно входит ось

вращения прибора. Второе зубчатое колесо прикреплено к камере и вместе с первым образует пару, которая присоединена к часовому механизму и таким образом осуществляет поворот камеры на 360° .

При вращении камеры перед щелью в фокальной плоскости

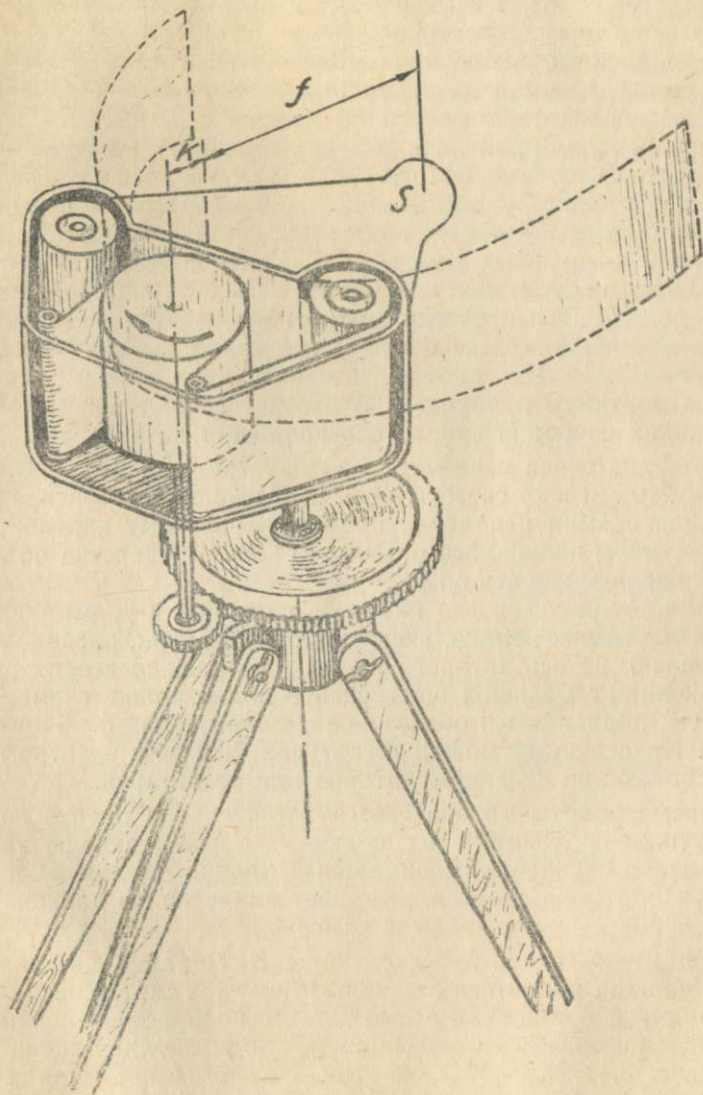


Рис. 14.

равномерно перематывается светочувствительная пленка с одного валика на другой. Полный поворот происходит за 10 секунд. Запас пленки составляет около 10 м. На снимке отмечается главная горизонталь (ось X) при помощи тонкой нити, помещенной в соответствующем месте перед щелью. Ширина щели для регулирования выдержки может изменяться в зависимости от условий освещения и от других факторов.

Дальнейших сообщений о применении щелевой съёмки для топографических целей в литературных источниках не обнаружено.

В связи с развитием фотографирования с самолета к щелевой съёмке вновь стали проявлять интерес. Большую работу в этой области провел В. С. Семенов. В 1935 году он произвел первую щелевую аэрофотосъёмку при помощи построенного им прибора [4]. Продолжая свои работы по конструированию и практическому использованию щелевых камер, В. С. Семенов создал в 1946 году прибор Шафацикл-21 для наземной щелевой фотограмметрической съёмки [7]. Схематически этот прибор изображен на рис. 14

Для изготовления Шафацикл-21 использованы корпус и другие детали АФА-ИМ. На головке штатива неподвижно укреплен шестерня большого радиуса R . В отверстие шестерни на шарикоподшипниках свободно входит ось вращения камеры.

Камера снабжена объективом «Индустар-4» с фокусным расстоянием 210 мм и со светосилой 1:4. Юстировка объектива произведена для съёмки недалеких предметов, поэтому картинное расстояние камеры получилось равным 214 мм. Отверстие объектива можно диафрагмировать до $1/24$.

В камере находятся две катушки, сдающая и наматывающая, два направляющих валика, экспозиционный валик, расположенный перед щелью, на ось которого насажена малая шестерня радиуса r , соединенная с большой шестерней в планетарной схеме. Запас пленки составляет 9 м и обеспечивает съёмку на 5—6 оборотов камеры. На ось наматывающей катушки насажен электромотор в 24 в, работающий от аккумуляторов или от батарей.

Во время работы мотора светочувствительная пленка со сдающей катушки проходит перед щелью на наматывающую катушку, при этом она огибает экспозиционный валик, заставляя его вращаться, что, в свою очередь, вызывает планетарное движение малой шестерни, а с ней — и самой камеры.

Передаточное число зубчатой пары ($R:r$) равно 3,4; длина панорамы должна равняться $2\pi r = 2\pi \cdot 214 \text{ мм} \approx 132 \text{ см}$. Экспозиционный валик радиуса K должен перемотать это количество пленки за 3,4 оборота, а камера за это время сделает один полный оборот. Следовательно, $3,4 \times 2\pi K = 132 \text{ см}$, откуда $K = 63 \text{ мм}$. Ширина щели 2 мм. Выполненные этим аппаратом съёмки имеют удовлетворительное качество.

К недостаткам Щафоцикл-21 нужно отнести: 1) отсутствие плавного вращения камеры и как следствие этого неравномерное засвечивание пленки, вызывающее так называемую зебрность изображения; 2) отсутствие приспособлений, отмечающих на снимке положение главной горизонтали (оси x); 3) отсутствие уровней и подъёмных винтов, из-за чего нельзя достаточно точно установить оптическую ось в горизонтальное положение.

В заключение следует отметить, что за последнее десятилетие не появилось новых конструкций щелевых аппаратов для наземных съёмок. Очевидно, в какой-то мере это объясняется недостаточным знакомством производителей с таким способом съёмки. Одна из важных особенностей щелевой съёмки — возможность фотографирования при плохом освещении (в сумерки, в период белых ночей) — не всегда учитывается при выборе того или иного метода съёмочных работ.

Приведенные в настоящей статье исследования раскрывают геометрическую сущность проекций, получаемых на цилиндрической поверхности при помощи плоского светового пучка. Эти исследования могут облегчить понимание циклоидальных щелевых съёмок с самолета, в процессе которых проектирующий пучок вращается вокруг вертикальной оси, а сама ось при этом совершает поступательное движение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брустин Б. И., Гилев С. С., Семенов В. С., Юцевич Ю. К. Аэрофотооборудование самолетов. Л., 1948.
2. Гонин Г. Б. Исследование проекции аэроснимков, полученных щелевой камерой. Проблемы Арктики, 1959, № 6.
3. Келль Н. Г. Фотография и фотограмметрия. М., 1937.
4. Коршак Ф. А. Маршрутная щелевая аэрофотосъемка и ее геометрические основы. Тр. Высшего инженерно-технического училища ВМФ, вып. 42, 1957.
5. Коршак Ф. А. Искажения на щелевых аэроснимках, происходящие от изменения заданных элементов ориентирования. Тр. Высшего инженерно-технического училища ВМФ, вып. 42, 1957.
6. Надеждин А. С. Фотограмметрический аппарат Дамуазо. Железнодорожное дело, 1892, № 26.
7. Семенов В. С. Метод панорамного фотографирования. Тр. Ленинградской военно-воздушной академии, вып. 9, 1946.
8. Тиле Р. Ю. Фотограмметрия в современном развитии. Т. 1, СПб, 1908.
9. Фотограф, 1865, № 11—12.

А. А. БАБАЕВ

ИЗМЕНЕНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ МОНОКРИСТАЛЛА ТЕЛЛУРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Одним из важных свойств полупроводников, изучаемых современной физикой, является изменение термоэдс в магнитном поле или, как его еще называют, продольный эффект Нернста Эттингсгаузена. Этот эффект в полупроводниках изучен мало и совершенно не изучен в монокристаллическом теллуре.

Теллур кристаллизуется в гексагональной структуре, атомы его расположены в спиральных цепочках, каждый атом в которых связан ковалентными связями с двумя ближайшими соседями по цепочке; цепочки связаны между собой силами Вандер-Ваальсовского типа. Направления осей цепочек совпадают с С-осью кристалла (Ларк-Гаровец, 1957).

По данным рентгенографического анализа (Жузе В. П., 1957), однородные звенья в цепочках, состоящие только из атомов Те, очень короткие и число атомов в них не превышает 4—5 (рис. 1).

Монокристалл теллур является сильно анизотропным полупроводником, его электропроводность при 20° С параллельно и перпендикулярно С-оси различается в два раза: $\rho_1 = 0,51 \text{ ом}\cdot\text{см}$, $\rho_{11} = 0,26 \text{ ом}\cdot\text{см}$, а при нагревании он сильно расширяется в направлении, перпендикулярном С-оси, и слегка сжимается вдоль С-оси.

По Шалыту С. С. (1957), ниже 200° К в примесной области проводимости теллура всегда имеют дырочный характер. Согласно работе Багдужева Г. Б. (1958), собственной проводимостью монокристалл теллур обладает, начиная с температуры 240° К.

По литературным данным (Шалыт С. С., 1957), знак эффекта Холла и термоэдс в теллуре изменяется с дырочного на электронный — при переходе от примесной проводимости к собственной при температуре, зависящей от чистоты образца, и второй раз снова на p — в собственной проводимости. Такое поведение теллура

является следствием того, что при комнатной температуре подвижность электронов $\mu_n = 1700 \frac{\text{см}^2}{\text{в. сек}}$ превышает подвижность дырок

$\mu_p = 1200 \frac{\text{см}^2}{\text{в. сек}}$, а по мере повышения температуры обе подвижности уменьшаются так, что подвижность электронов становится меньше подвижности дырок. Это связано с тем, что проводящая зона теллура имеет сложную структуру: в теллуре имеются

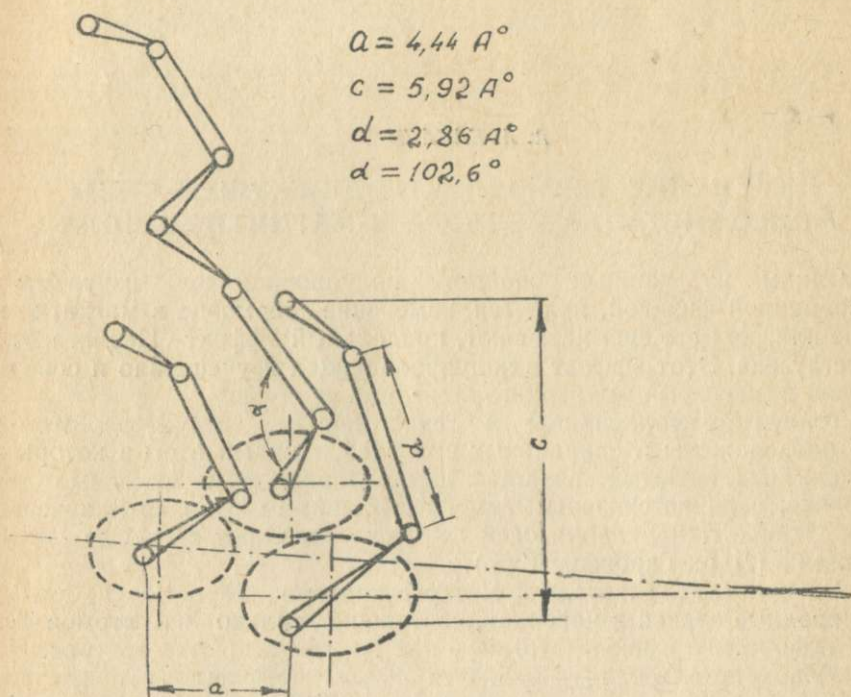


Рис. 1.

две группы проводящих электронов различной подвижности. С повышением температуры изменяется соотношение между количествами электронов этих двух групп. Это приводит к уменьшению средней подвижности электронов (См. Шалыт С. С. — Электропроводность полупроводников. Полупроводники в науке и технике, т. 1). Согласно другой интерпретации, валентная зона содержит другую зону с более высокой подвижностью, внутри которой дырки возбуждаются при высоких температурах. Таким образом, рост средней подвижности дырок сильнее, чем электронов, и по этой причине термоэдс становится положительной. Наиболее веским поводом для объяснения перемены знака термоэдс может стать ее нуле-

вое значение, если в данный момент в проводимости участвуют два сорта носителей с противоположными знаками (Шалыт С. С., 1957). При плавлении (445°C) термоэдс чистого теллура резко уменьшается до 9—10 мкВ/град и остается положительной выше точки плавления, примерно до 575°C , где она меняет свой знак на отрицательный (Ларк-Гаровец, 1957). При температуре 623°K термоэдс параллельно С-оси достигает $+320$ мкВ/град, а перпендикулярно С-оси величины $+135$ мкВ/град (рис. 2).

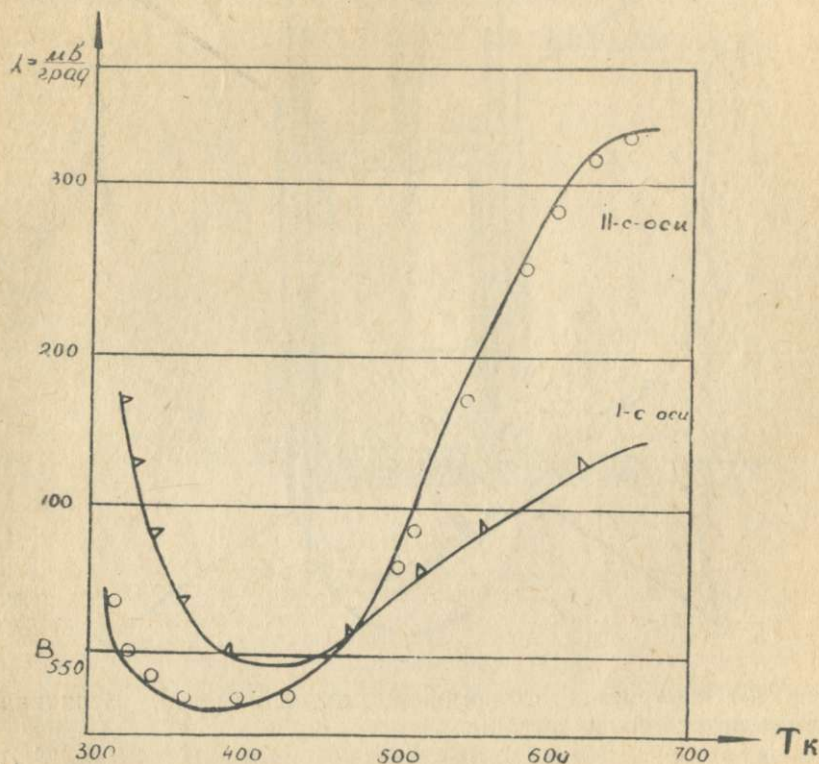


Рис. 2.

Методика измерения

Прямоугольный образец монокристаллического теллура помещается между нагревателем и холодильником. К торцам образца припаяны термопары для измерения градиента температуры. Возникающая термоэлектродвижущая сила снимается с зондов, приваренных к образцу. Патрон с образцом помещается в цилиндри-

ческую печь, позволяющую регулировать среднюю температуру образца. При измерениях в жидком азоте или кислороде вся система помещается в тонкостенный медный цилиндр, а затем — в сосуд Дьюара. Сосуд Дьюара устанавливается между полюсами электромагнита (рис. 3).

После установления стационарности теплового потока термо-

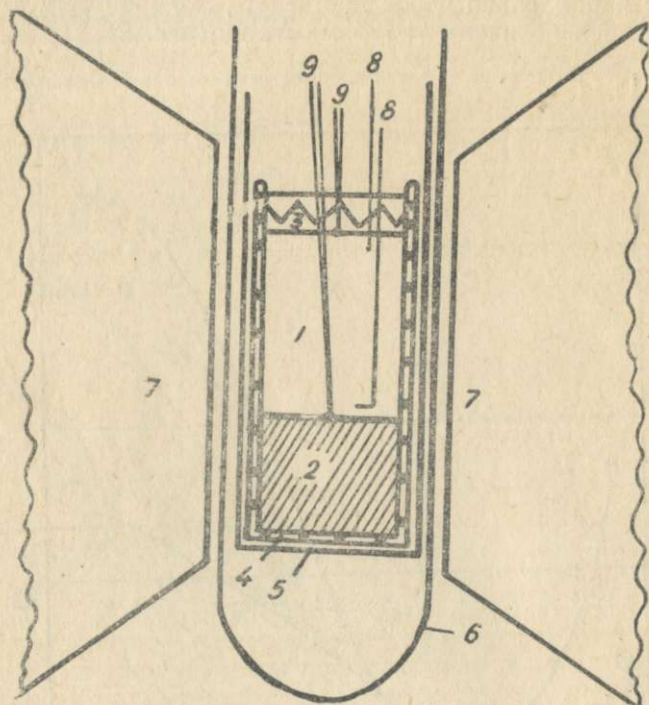


Рис. 3.

эдс (α_0) измеряется с помощью потенциометра. Величина α_0 определяется по формуле:

$$\alpha_0 = \frac{V_0}{l_3 \frac{\Delta T}{l}}, \quad (1)$$

где l_3 — расстояние между зондами в см, l — длина образца в см, ΔT — разность температур между торцами образца в градусах, V_0 — разность потенциалов на зондах в вольтах.

Затем термоэдс определяется при наложении магнитного поля:

$$\alpha_H = \frac{\frac{V_+ + H + V_- - H}{2}}{l_3 \frac{\Delta T}{l}}, \quad (2)$$

Здесь α_H — термоэдс при наложении магнитного поля

$$\Delta\alpha = \alpha_H - \alpha_0 = \frac{\frac{V_{+H} + V_{-H}}{2} - V_0}{l_s \frac{\Delta T}{l}} \quad (3)$$

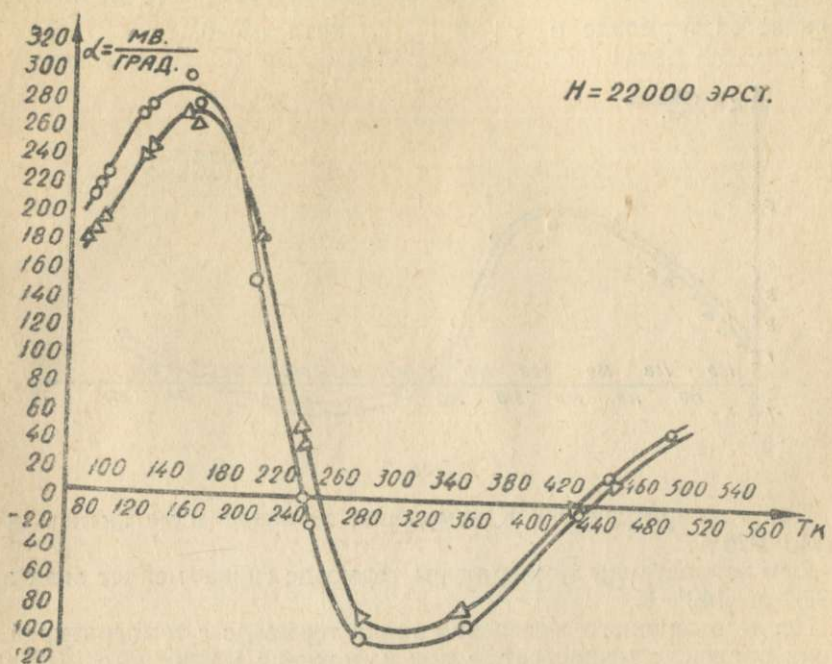


Рис. 4.

Эффект изменения термоэдс в магнитном поле $\frac{\Delta\alpha}{\alpha_0}$ можно определить в процентах. Поле, в котором проводились исследования, достигало 18000 и 22000 эрстед при зазоре между полюсами электромагнита 37 мм, 31 мм

Экспериментальные результаты

На рисунках 4 и 5 представлены результаты измерения термоэдс в магнитном поле 18000 и 22000 эрст на монокристаллических образцах теллура.

Рисунки 4—5 показывают, что термоэдс этих образцов увеличивается, примерно, от 84° до 162° — 220° K , а в магнитном поле уменьшается в среднем на 14,1%.

Начиная со $162\text{--}220^\circ\text{K}$, термоэдс этих образцов уменьшается с температурой, а при наложении магнитного поля увеличивается в среднем на $8,3\%$. В образце 8 ближе к температуре инверсии 304°K изменение термоэдс в магнитном поле 18000 эрстед достигает $30\text{--}40\%$. В образце 5 при температуре $248, 36^\circ\text{K}$ термоэдс претерпевает инверсию.

При наложении магнитного поля 22000 эрст в точке инверсии появляется термоэдс $\alpha_n = +49,2 \frac{\text{мкВ}}{\text{град}}$, хотя $\alpha_0 = 0$.

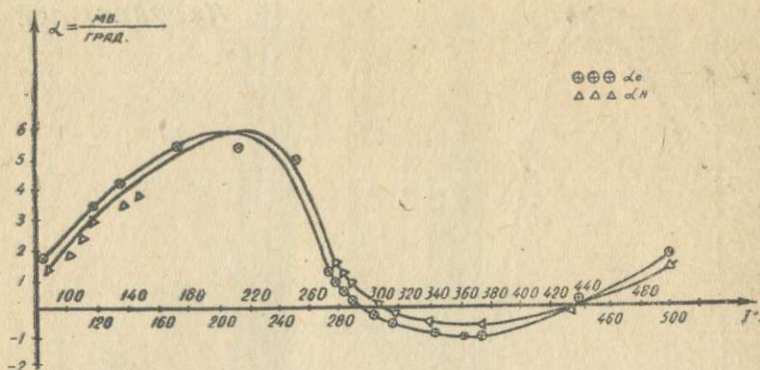


Рис. 5.

При температуре 250°K изменение термоэдс в магнитном поле равно 226% .

При возрастании температуры термоэдс снова меняет знак при $439,6^\circ$ и 442°K .

После вторичного изменения знака термоэдс с температурой в обоих образцах возрастает, а при наложении магнитного $18000\text{--}22000$ эрстед наблюдается уменьшение α_0 , т. е. $\alpha_n < \alpha_0$.

Обнаруженные нами экспериментально особенности изменения продольного эффекта Н—Э в монокристаллах теллура с температурой качественно могут быть объяснены следующим образом. В примесной области при $T < 140^\circ\text{K}$ носители тока—дырки рассеиваются преимущественно на ионизированных примесях. В этом случае, как известно, теория предсказывает уменьшение термоэдс при наложении магнитного поля. С ростом температуры при $T > 200^\circ\text{K}$ в проводимости теллура начинают принимать участие и электроны. Поэтому наблюдаемые изменения термоэдс в магнитном поле выше 200°K связаны с наличием смешанной проводимости и собственной проводимостью.

В заключение выражаю благодарность Х. И. Амирханову за ценные советы при выполнении работы и за обсуждение результатов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Багдурев Г. Б. Диссертация, ЛГУ, 1958.
 2. Жузе В. П. Полупроводниковые материалы, вып. 17, 1957.
 3. Ларк-Гаровец. Электрические свойства твердого и жидкого теллура, (Phys Rev), 1957.
 4. Шалыт С. С. ЖТФ, т. XXVIII, вып. I, 1957.
 5. Шалыт С. С. Электропроводность полупроводников. Полупроводники в науке и технике, т. I, 1957.
-

Б. П. ПАШАЕВ.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ СИСТЕМЫ КАДМИЙ—ОЛОВО

Эвтектическая система кадмий—олово является системой с ограниченной растворимостью компонентов, на которой многими исследователями обнаружено фазовое превращение в твердом состоянии. Изучение физических свойств этой системы представляет интерес ввиду того, что она имеет сходство с практически очень важной системой железо—углерод. Все сплавы этой системы, за исключением небольших областей твердых растворов, оканчивают затвердевание на эвтектической горизонтали.

Изучением диаграммы состояния системы кадмий—олово занимались Хансен [1941] и другие авторы. Капп [1901] впервые показал, что элементы кадмий и олово образуют между собой механическую смесь с температурой эвтектики 177°C . Эвтектическая концентрация, по его данным, составляет 28,5% Cd и 71,5% Sn.

При дальнейшем изучении было обращено внимание на следующие вопросы: 1) выявление взаимной растворимости компонентов, 2) уточнение концентрации эвтектики, 3) фазовые превращения в твердом состоянии. В ряде работ были сделаны попытки доказать образование химических соединений между оловом и кадмием. Так, согласно Штоффелю [1917], изучившему эту систему термическим и dilatометрическим методами, данная система имеет химическое соединение типа CdSn_4 или CdSn_3 . К такому же заключению пришли Ле Бланк и Нейман [1927]. Однако Бухер [1916], изучая термоэлектродвижущую силу в зависимости от состава, а Шишочкин и Агеева [1929]—зависимость твердости от состава, показали отсутствие разрыва непрерывности кривой, свойственного химическому соединению. Ошибочность предположения Ле Бланка и Неймана [1927] следует и из того факта, что у них на изотерме электропроводности не был получен максимум, характерный для химического соединения, а наблюдается лишь незначительный пе-

региб. Такой перегиб, очевидно, может получиться из-за изменения степени растворимости одного компонента в другом, отступлением от состояния равновесия или из-за разбросов экспериментальных точек. Таким образом, не подтверждается существование какого-либо химического соединения со стороны олова. Что касается сплавов, богатых кадмием, Спенсер и Джон [1927], измеряя магнитную восприимчивость, высказали мысль о существовании химического соединения Cd_7Sn . Это предположение тоже косвенным путем отвергнуто в 1932 году Шимидзи [1932] при изучении плотности и электропроводности некоторых сплавов данной системы в жидком состоянии. По его мнению, обнаруженное Спенсером явление было обусловлено растворенными в сплаве газами.

О степени растворимости кадмия в олове и олова в кадмии существуют также различные мнения. По Штоффелю, при 177°C в олове может растворяться от 5 до 10 % веса Cd. Согласно Мозогто [1913], растворимость кадмия в олове при 177°C составляет 10 % Cd, при 130°C —5,5 % Cd. К такому же выводу пришел Федоров [1926], проведя повторные исследования. Лоренц и Плумбридж считали, что растворимость кадмия в олове очень незначительна—3 % Cd при 177°C . Такие же значительно заниженные значения для растворимости кадмия в олове приводятся в работе Матуяма [1931], который получил эти значения на основе измерений электросопротивления, термоэлектродвижущей силы и линейного расширения: при 177°C —5,5 %, при 130°C —1,5 % и при комнатной температуре—1,2 % Cd. По Ле Бланку, в олове при 170°C растворяется 7 %, при 130°C —5 % и при комнатной температуре—2,5 % Cd. О растворимости олова в кадмии не имеется достоверных данных: по Ле Бланку, растворимость олова в кадмии 1 %, согласно Шишочкину и Агеевой, существуют твердые растворы со значительно большим содержанием олова в кадмии. Таким образом, на основании всего накопленного опытного материала можно полагать, что при комнатной температуре растворимость кадмия в олове составляет ничтожную долю, при 128°C —5 %, при 177°C —7 %. Диаграмма состояния системы кадмий—олово приведена на рис. 1.

Ввиду того, что нами ранее было проведено измерение электрических и тепловых свойств чистого кадмия и олова [1957], представляется интересным изучить эти свойства и на сплавах олова с кадмием. При этом мы имели в виду, с одной стороны, выяснить связь тепловых и электрических свойств с составом сплавов, а с другой стороны, изучить влияние температуры на характер изменения передачи тепла и электричества в образцах различных составов.

Как известно, существующие теории проводимости рассматривают явления с такими упрощениями, что это приводит к расхож-

лению результатов измерения с вычисленными по теории данными. Например, сторонники зонной теории, принимая во внимание взаимодействие электронов проводимости с колебаниями решетки, пренебрегают корреляцией между электронами. Такое упрощение, естественно, приводит к непригодности этой теории для объясне-

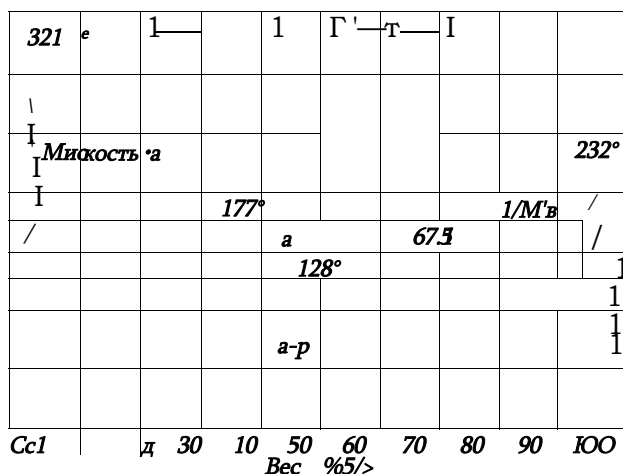


Рис. 1. Диаграмма состояния системы кадмий — олово.

• 11 и я механизма передачи тепла и электричества в металлах и металлических сплавах. Для построения теории, которая позволяла бы лучше разобраться в механизме теплопроводности и электропроводности, необходимо накопление как можно большего экспериментального материала о температурной зависимости этих свойств в широком температурном интервале.

Представляет также интерес выяснение характера изменения электропроводности и теплопроводности при фазовом (превращении в сплавах а) системы кадмий—олово. По поводу фазового превращения в сплавах кадмий с оловом существуют различные, иногда противоречивые мнения. Результаты исследований, проведенные многими исследователями, привели к выводу о наличии фазового превращения при 128—130°C для сплавов рассматриваемой системы.

Проведение измерений

Измерение электропроводности и теплопроводности образцов проведено на установке (рис. 2), собранной нами по методике, разработанной при кафедре молекулярной физики Моск. госуниверси-

тета В. Е. Микрюковым [1944]. Общее описание нашей установки было дано в работе автора [1957]. Однако впоследствии в установке были сделаны некоторые улучшения, позволившие увеличить точность измерения. На данной установке можно одновременно измерять электропроводность, теплопроводность, термоэлектродвижущую силу и тепловое расширение металлов. Поэтому такая установка, несомненно, представляет интерес для комплексных исследований тепловых и электрических свойств материалов.

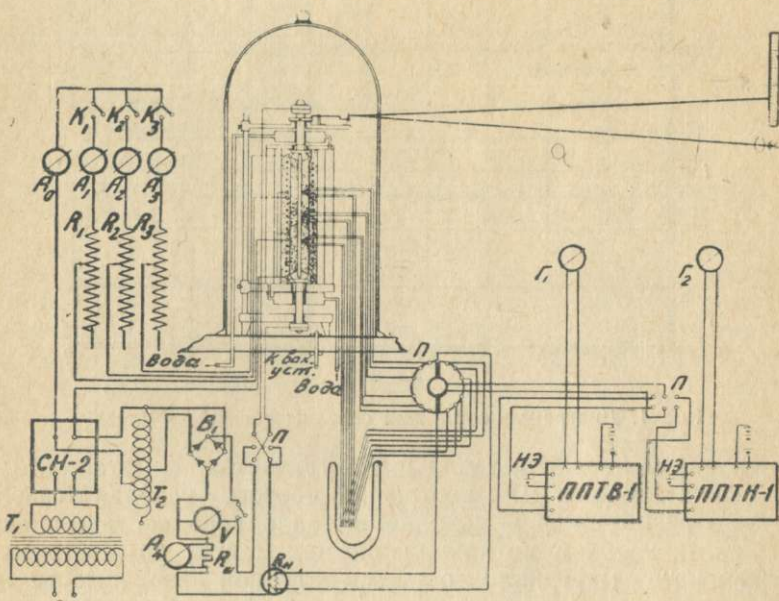


Рис. 2. Схема установки для измерения теплопроводности и электропроводности металлов и металлических сплавов

В рассматриваемом методе вначале вычисляется отношение теплопроводности к электропроводности:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{V^2}{2(\Delta t - \varepsilon N) \left[\frac{6^2}{\pi r^2} \right]},$$

где V — разность потенциалов на участке образца, Δt — разность температур, ε и N — поправки по Егеру и Диссельхорсту. Электропроводность определяется формулой:

$$\sigma = \frac{l}{\pi r^2 R_0} \frac{V_0}{V},$$

где r — радиус поперечного сечения образца, V_0 — разность потен-

циалов на образцовом сопротивлении. Зная отношение теплопроводности к электропроводности, до электропроводности можно найти теплопроводность:

$$\underline{X} = 0,24 \cdot \frac{\Gamma_{\text{кал}}}{\text{гЫ}(\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{граО})} \cdot 1-$$

Ошибки в измерении электропроводности не превышали 1,3%, а теплопроводности—3 %.

Материалами для измерения служили, чистые металлы: олово чистотой 99,94% и кадмий ч.д.а. Образцы сплавов кадмий—олово изготовлены из точно отвешенных количеств компонентов. Плавле-

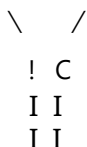


Рис.3. Форма для изготовления образцов,

ние производилось в фарфоровых или графитовых тиглях под слоем древесного угля во избежание окисления образцов. После плавления и изготовления образцов остатки расплавов подверглись химическому анализу для учета изменений в составе, которые могут иметь место в результате утара и частичных окислений. Химический состав отразное, который они имели после плавления, приведен в таблице № 1.

Для отливки образцов использовались формы из чугуна или специально изготовленные формы из теста огнеупорной глины с тонко измельченным порошком шамота. Формы из огнеупорной глины с шамотом имеют некоторые преимущества перед металлическими и графитовыми; их можно легко изготовить для любой конфигурации и размеров образца. Из-за малой величины теплопроводности керамики жидкий сплав охлаждается в таких формах медленно, что очень важно при отливке для хорошего заполнения формы. Каждая форма состояла из двух половинок (рис. 3), зажимаемых между собою при помощи болтиков.

Наиболее ровные поверхности у образцов получаются при помощи металлических форм. В других случаях для получения более ровной поверхности применялось протягивание образца через фильеры. Для устранения напряжений и неоднородностей в опла-

вах олова с кадмием они отжигались в термостате в течение 6 часов при температуре около 150°C .

Рабочая длина образца составляла 3 см. Падение температуры на образце, вызываемое электрическим током, проходящим через него, изменялось от $5\div 6^{\circ}\text{C}$ при $t_{cp}=60^{\circ}\text{C}$ до $20\div 25^{\circ}\text{C}$ при $t_{cp}=150^{\circ}\text{C}$.

Таблица 1

Химический состав образцов системы кадмий-олово

№№	Состав в вес %		
	Cd	Sn	прочие примеси
1	0	99,94	0,06
2	1,91	98,07	0,03
3	4,79	95,16	0,05
4	24,24	75,41	0,05
5	28,72	71,20	0,08
6	31,87	69,01	0,12
7	35,8	63,01	0,09
8	49,81	49,83	0,04
9	75,42	24,41	0,17
10	99,96	0	0,04

Результаты измерения

Удельное сопротивление. Результаты измерения удельного сопротивления сплавов системы кадмий—олово приведены на рис. 4 и 5. Здесь же приведены для сравнения удельные сопротивления для чистого олова и кадмия. Как видно из рис. 4, удельное сопротивление олова резко увеличивается при прибавлении к нему небольших количеств (1,91 и 4,74 вес%) кадмия. Это связано с образованием твердого раствора кадмия в олове, при концентрациях до 5% Cd. При дальнейшем увеличении концентрации кадмия удельное сопротивление образцов начинает уменьшаться. Исключение составляет образец 31,86 вес % Cd+Sn (рис. 5), кривая удельного сопротивления которого расположена выше кривой для образца с меньшим содержанием кадмия (28,72%). Это, видимо, связано с тем, что состав данного сплава близок к эвтектическому составу. Такое отклонение для эвтектического состава не было замечено как в работе Ле Бланка [1927], так и у Матиссена [1937].

Пренебрежение особенностью в свойствах эвтектического состава, видимо, связано с той неясностью, которая долгое время имела место в отношении электрических свойств сплавов и их связи со свойствами компонентов. Обычно считают, что между электросопротивлением сплава, представляющим механическую смесь,

и электросопротивлениями компонентов существует полная аддитивность. Если состав выражен в объемных процентах, то зависимость удельного сопротивления от концентрации выражается прямой линией, соединяющей электросопротивление компонентов. При выражении концентрации другими процентами эта зависи-

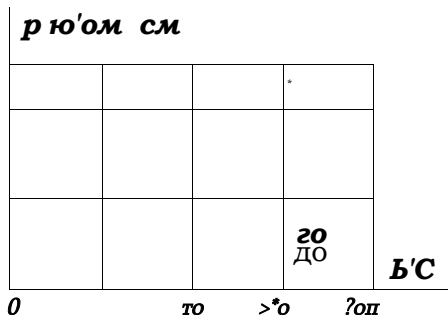


Рис. 4. Температурная зависимость удельного сопротивления сплавов: 1 олово, 2 1,91% Сd+5п; 3 -4, 74% Сd+5п

мость изменяет свой характер [1937]. Измерения А. Сальдау для ряда металлических систем (олово—свинец, олово—цинк и т. д.) показали, что электросопротивление сплава, соответствующего эвтектическому составу, не укладывается в прямолинейную зависимость [1952], а выделяется среди других более или менее четко выраженным максимумом, что ясно видно и из наших измерений.

При повышении температуры электросопротивление всех образцов сплавов кадмия с оловом увеличивается. Это увеличение сначала происходит, примерно, по линейному закону. При температуре около 140° образец с 1,91% Сd наблюдается небольшой перегиб. У остальных изученных нами образцов четко заметные перегибы происходят при температурах $125\text{—}130^{\circ}$ (в среднем около 128° С). Эти аномалии на кривых температурной зависимости удельного сопротивления, по-видимому, связаны с фазовым превращением, которому подвергается данная система в твердом состоянии при $127\text{—}130^{\circ}$ С.

Теплопроводность. Результаты измерения теплопроводности сплавов системы кадмий — олово в зависимости от температуры приведены на рис. 6 и 7.

Как видно из рис. 6, теплопроводность образцов, содержащих 1,91 и 4,74% кадмия, меньше теплопроводности чистого олова. Это связано с образованием твердого раствора кадмия с оловом при таких концентрациях. Теплопроводность этих образцов незначительно увеличивается с температурой. Также увеличивается теплопроводность образца 75,42%Сд+24,41 %Sn с повышением темпера-

туры до 150°C . У остальных образцов при температуре до $125\text{--}130^{\circ}\text{C}$ теплопроводность или остается без изменения или уменьшается. Изменения теплопроводности при изменении температуры на 100°C не превышает $2\text{--}3\%$.

В литературе не встречаются работы по измерению теплопроводности сплавов кадмия с оловом в области твердых растворов.

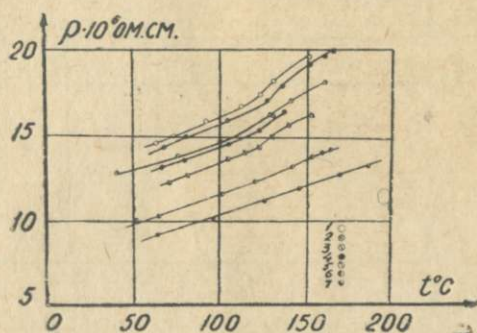


Рис. 5. Зависимость удельного сопротивления сплавов от температуры: 1 — $24,24\% \text{Cd} + 75,42\% \text{Sn}$; 2 — $31,86\% \text{Cd} + 60,01\% \text{Sn}$; 3 — $28,72\% \text{Cd} + 71,20\% \text{Sn}$; 4 — $35,80\% \text{Cd} + 63,01\% \text{Sn}$; 5 — $49,81\% \text{Cd} + 49,83\% \text{Sn}$; 6 — $75,42\% \text{Cd} + 24,41\% \text{Sn}$; 7 — Cd .

для эвтектического состава и измерения зависимости теплопроводности от температуры выше 100°C . Известны данные для теплопроводности нескольких образцов системы кадмий—олово при 50°C [техн. энц. 1931] и для 4 сплавов этой системы при



Рис. 6. Зависимость теплопроводности сплавов от температуры: 1 — олово, 2 — $1,91\% \text{Cd} + \text{Sn}$; 3 — $4,79\% \text{Cd} + \text{Sn}$.

температурах — $100,0^{\circ}$ и $+100,0^{\circ}\text{C}$ [Чиркин, 1957]. На рис. 7 приведены данные при 0 и $+100^{\circ}\text{C}$. Согласно этим данным, теплопроводность сплава $20\% \text{Cd} + 80\% \text{Sn}$ уменьшается с температурой, а у образцов, содержащих $40\% \text{Cd} + 60\% \text{Sn}$, увеличивается, примерно, на 2% при повышении температуры на 100°C . Сравнение показывает, что как по величине, так и по температурной зависимости

теплопроводности сплавов олова с кадмием наши данные согласуются с данными [техн. энц. 1931, Чиркин, 1957] в пределах ошибок измерения.

По полученным нами результатам измерений видно, что около $127\text{--}130^\circ$ кривые зависимости теплопроводности сплавов от температуры претерпевают перегибы. Менее заметен такой перегиб для образца, содержащего сравнительно большое количество кадмия (75,42%). Отмеченные аномалии на кривых теплопроводности,

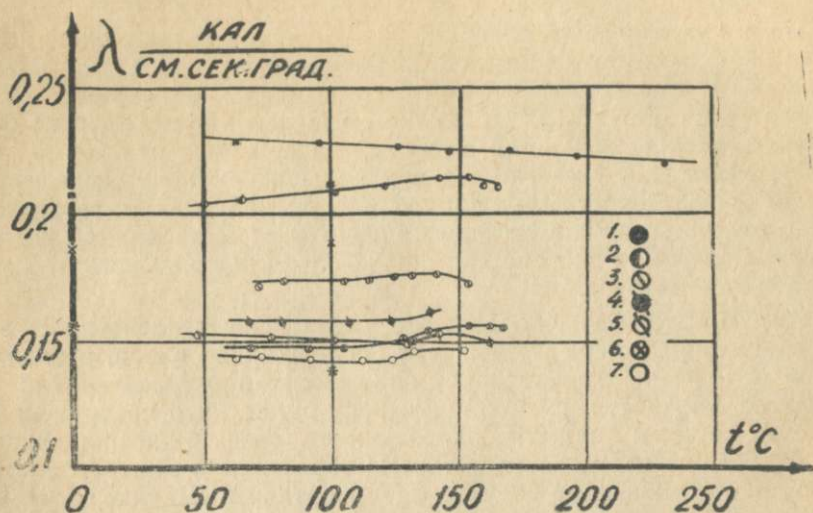


Рис. 7. Зависимость теплопроводности сплавов от температуры: 1—Cd; 2—75,42% Cd+24,42% Sn; 3—49,81% Cd+49,83% Sn; 4—35,80% Cd+63,01% Sn; 5—28,72% Cd+71,20% Sn; 6—31,87% Cd+60,01% Sn; 7—24,24% Cd+75,42% Sn. По данным [17]: 8—40% Cd+60% Sn; 9—60% Cd+40% Sn; 10—80% Cd+20% Sn

аналогичные с аномалиями на кривых электросопротивления, видимо, обусловлены фазовым превращением в согласии с диаграммой состояния данной системы. Теплопроводность сплавов при больших концентрациях, чем 4,74 Cd, постепенно увеличивается с увеличением содержания кадмия. Только для образца, наиболее близкого к эвтектическому составу, наблюдается, как и в случае электросопротивления, исключение. Теплопроводность этого сплава до 125° меньше, а выше этой температуры больше теплопроводности образца, содержащего меньшее количество кадмия (28,72% Cd). Теплопроводность сплава 28,72% Cd+71,20% Sn примерно такая же, как у чистого олова.

Малые значения величины теплопроводности сплава эвтектического состава объясняются сравнительно большой дисперсностью его структуры по сравнению со смежными составами. Увеличение теплопроводности эвтектоиды выше $125-128^{\circ}\text{C}$ объясняется упрочнением связи между зернами, переходом в более компактное состояние. Как известно, теплопроводность углеродистой стали выше 723° (при переходе из фазы феррита в аустенит) также начинает увеличиваться. Это увеличение объясняется изменением в структуре сплава.

По поводу фазового превращения сплавов кадмия с оловом при $128-130^{\circ}\text{C}$ существуют различные мнения. Еще в 1901 году Штоффель [1907] dilatометрическими измерениями обнаружил точку превращения вблизи 135°C . При этом тепловой эффект превращения оказался одинаковым для сплавов, содержащих от 5 до 30% Cd. Этот эффект явно уменьшался при дальнейшем понижении содержания олова. Штоффель приписал это распаду какого-то химического соединения. Однако утверждение о существовании химических соединений в системе кадмий — олово было отвергнуто работами ряда авторов.

Опыты Штоффеля, показавшие уменьшение теплового эффекта превращения по мере уменьшения содержания олова, а также и наши измерения температурной зависимости электросопротивления и теплопроводности приводят к выводу о том, что превращение в сплавах системы кадмий—олово имеет связь с превращением в олове. Оно не является следствием образования или распада какого-либо химического соединения. Гюртлер и Шлейхер [1912] на основе термического и микроскопического исследований превращение в системе Cd—Sn (при $127\pm 2^{\circ}\text{C}$ по их данным) также ставили в связь с превращением олова $\beta \rightarrow \gamma$ при 161°C . К такому же заключению пришел Мозотто [1913], исследуя теплоту кристаллизации и превращения на отожженных образцах.

Несколько другого взгляда на фазовое превращение в данной системе придерживаются Матуяма [1931], Хансон и Пен-Уолтон [1935]. Матуяма, отрицая фазовое превращение олова, считает горизонталь превращения (при $\sim 128^{\circ}\text{C}$) эвтектоидной горизонталью, которая отвечает распаду богатого кадмием твердого раствора с 95,7% Sn (соответствующего эвтектоидной точке) в раствор кадмия и богатого оловом твердый раствор с 98,5% Sn. Утверждение Матуяма о существовании эвтектоидного распада пока не подтверждено микроскопическими исследованиями. Поэтому еще нет достаточно ясного объяснения теплового эффекта соответственно фазовому превращению, если не принять фазовое превращение $\beta \rightarrow \gamma$ олова.

Как по нашим, так и по исследованиям ряда других авторов, олово обладает фазовым превращением при $\sim 160^{\circ}\text{C}$. Это превра-

шение олова оказывает влияние и на сплавы системы Cd—Sn при изменении температуры. Согласно диаграмме состояния этой системы растворимость кадмия в олове при нагревании сначала медленно увеличивается от 0 до 2%, а при 128°C увеличивается скачком от 2 до 5%. По мере увеличения содержания кадмия температура превращения олова, видимо, уменьшается от 160°C для чистого олова до 128°C для сплавов, содержащих более 5% кадмия.

Сравнение электропроводности с теплопроводностью

Из сравнения изменений теплопроводности и электропроводности сплавов при переходе через точку превращения (128°C) следует, что в механизме переноса тепла и электричества происходят при этом некоторые изменения. При перестройке кристаллической решетки (или, иначе, в процессе образования твердого раствора, богатого кадмием, вместо мелкой эвтектидной смеси) рассеяние электронных волн на нарушениях кристаллической решетки усиливается и кривая удельного сопротивления перегибается вверх, свидетельствуя о росте удельного сопротивления. Дальше точки перегиба температурный коэффициент удельного сопротивления имеет тенденцию к уменьшению, оставаясь однако все время положительным. Это, вероятно, связано с тем, что после завершения процесса фазового превращения степень нарушений кристаллической решетки уменьшается. Теплопроводность также при этом несколько увеличивается. Различие, наблюдаемое в поведении теплопроводности и электропроводности этих сплавов, можно качественно объяснить, исходя из уравнений проводимости Бете [1938], полученных на основе квантово-механических представлений:

$$\sigma = \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2} \frac{e^2 n^{3/2} l}{h},$$

$$\lambda = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2} \frac{e^2 n^{3/2} l T}{h},$$

где e — заряд электрона, l — длина свободного пробега, n — концентрация электронов проводимости, h — постоянная Планка.

$$l \sim \left(\frac{1}{T}\right)^\alpha, \text{ где } \alpha > 0.$$

Для приложения этих выражений как к чистым металлам, так и к металлическим сплавам, необходимо сделать некоторые допущения в отношении коэффициента α , который определяет характер изменения длины свободного пробега электронов с температурой. Для кадмия, олова и для тех сплавов, у которых наблюдается уменьшение теплопроводности с температурой, α больше единицы. Для случая, когда теплопроводность с температурой возрастает, α меньше единицы. При независимости теплопроводности от темпе-

ратуры, имеем $\alpha=1$. Из-за незначительной зависимости теплопроводности сплавов кадмий-олово от температуры, особенно до 128°C , можно принять $\alpha=1$. При этом удельное сопротивление будет линейно возрастать с температурой, что, действительно, наблюдается на наших измерениях. Выше температуры 128°C теплопроводность заметно увеличивается, соответственно изменяется и удельное сопротивление, при этом коэффициент α меньше единицы. При приближении к точке плавления наблюдается уменьшение проводимости.

Кроме длины свободного пробега, влияние на проводимость может оказать изменение концентрации электронов проводимости. Хотя принято считать электронный газ в электронных проводниках вырожденным, имеется указание об увеличении концентрации электронов в кадмий в зависимости от температуры [Вильсон, 1941].

Соотношение Видемана — Франца $\frac{\lambda}{\sigma T}$, как показывают результаты наших вычислений, для всех испытанных нами образцов системы кадмий—олово больше теоретического значения величины. Сравнительно большое значение оно достигает около 128°C , превышая теоретическое значение на 10—15% для некоторых образцов.

Как экспериментально показал Микрюков [1956, 1957, 1958], металлы и металлические сплавы в зависимости от отношения их электропроводности σ к электропроводности чистой меди $\sigma_{\text{сп}}$ можно разбить на две группы. К первой группе относятся такие металлы и сплавы, для которых $\frac{\sigma}{\sigma_{\text{сп}}} 100 > 25 \div 30\%$ и оправдывается теоретическое соотношение Видемана—Франца. В случае металлов и сплавов 2-й группы $\frac{\sigma}{\sigma_{\text{сп}}} 100 < 25\%$. Испытанные нами образцы системы Cd—Sn можно отнести ко второй группе, поскольку для них отношение $\frac{\sigma}{\sigma_{\text{сп}}} 100$ не превышает и 20%. Из-за сравнительно малой величины электропроводности этих образцов $\frac{\lambda_{\text{наб}}}{\sigma T} > \frac{\lambda_e}{\sigma T}$ на

величину $\frac{\lambda_{\text{реш}}}{\sigma T}$, где $\lambda_{\text{наб}}$ — наблюдаемое на опыте значение коэффициента теплопроводности, $\lambda_{\text{реш}}$ — теплопроводность, обусловленная колебаниями решетки. Это свидетельствует о том, что в переносе тепла, кроме свободных электронов, принимают участие и колебания решетки (микроколебания). При структурных превращениях участие колебаний решетки становится еще большим.

ВЫВОДЫ

1. Проведено одновременное измерение теплопроводности и электропроводности нескольких сплавов системы кадмий—олово.

2. Теплопроводность и электропроводность сплавов, содержащих 1,91% Cd и 4,74% Cd, меньше теплопроводности и электропроводности чистого олова на 7—10%. Это связано с образованием твердого раствора кадмия в олове, при котором нарушается периодическое поле кристаллической решетки внедренными атомами кадмия.

3. Для состава, близкого к эвтектическому (31,87% Cd + 69,01% Sn), наблюдаются также меньшие значения теплопроводности и электропроводности по сравнению со смежными составами, которые, видимо, обусловлены значительно большей дисперсностью эвтектического сплава.

4. Удельное сопротивление всех испытанных нами образцов системы кадмий—олово с повышением температуры увеличивается до 130° по линейному закону. Выше этой температуры наблюдается искривление в ходе зависимости $\rho=f(t)$ с тенденцией уменьшения температурного коэффициента удельного сопротивления выше точки перегиба.

5. Теплопроводность большинства рассмотренных сплавов данной системы до 128° существенно не изменяется с изменением температуры, а вблизи этой точки подвергается заметному росту. При приближении к точке плавления теплопроводность снова начинает падать.

6. Аномалии в тепловых и электрических свойствах, обнаруженные нами, подтверждают мнение о способности системы кадмий—олово к фазовому превращению около температуры 130°C. Данное превращение не является следствием образования какого-либо интерметаллического соединения, а является результатом образования твердого раствора, богатого кадмием, при котором сказывается влияние аллотропического превращения олова.

7. Соотношение Видемана—Франца (Лоренца) для всех испытанных сплавов олова с кадмием больше теоретического значения величины. Особенно большое отклонение от теоретического значения наблюдается вблизи точки превращения. Это показывает, что в переносе тепла, в случае сплавов данной системы, заметную роль играет решетчатая теплопроводность.

В заключение выражаю глубокую благодарность академику АН Азербайджанской ССР Х. И. Амирханову за предложенную тему и руководство, а также доктору физико-математических наук В. Е. Микрюкову за ценные советы по выполнению настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бете Г. и Зоммерфельд А. Электронная теория металлов, ОНТИ. М.—Л., 1938.
2. Вильсон А. Квантовая теория металлов. М.—Л., 1941.
3. Микрюков В. Е., Работнов С. И. Уч. записки МГУ, т. 74, 1944.
4. Микрюков В. Е. Вестник МГУ, серия матем., мех., астр., физ., хим., 1956, № 2.
5. Микрюков В. Е. Вестник МГУ, серия матем., мех., астр., физ. и хим., 1957, № 3, № 6.
6. Микрюков В. Е. и Чжоу Ши-Чан. Вестник МГУ, серия матем., мех., астр., физ., хим., 1958, № 3.
7. Пашаев Б. П. Уч. зап. Даггосуниверситета, т. I, 1957.
8. Сальдау П. Я. Метод электропроводности при высоких температурах. Изд. АН СССР, Л., 1952.
9. Техническая энциклопедия. Т. VII, 1931.
10. Федоров. Записки института химии. Вып. 2, 1926, стр. 69—74.
11. Хансен М. Структура бинарных сплавов, ч. I. М.—Л., 1941.
12. Чиркин В. С. Теплопроводность промышленных материалов, М., 1957.
13. Энциклопедия металлофизики. Т. I, ч. I, М.—Л., 1937.
14. Bucher L. anorg. allg. Chemie, 1916, Bd. 98, s. 100—107.
15. Hanson D., Pell-Walpole W. T. J. Inst. Metall., 1935, v. 56, p. 165.
16. Kapp A. W. Ann. Physik. 1901, Bd. 6, s. 762.
17. Le Blank M., Neuman M. Berl. verh. Sächs, Ges. Wiss. Math.—Phys., 1927, Bd. 79, s. 72—106.
18. Matuyama J. Sci Rep. Tohoku Univ., 1931, v. 20, p. 649—680.
19. Mozotto D. Int. I. Metallogr., 1913, Bd. 4, s. 13—27.
20. Shimizu G. Sci. Rep. Tohoku Univ, 1932, v. 21.
21. Schischokin V., Agejeva V. L. anorg. allg. Chemie, 1929, Bd. 193.
22. Schleicher A. P. Int. I. Metall, 1912, Bd. 2.
23. Sponser J., Iohn M. Proc. Roy. Soc., 1927, v. 116.
24. Stoffel L. L. anorg. allg. Chemie, 1907, Bd. 6, s. 762.

Б. П. ПАШАЕВ

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ НЕКОТОРЫХ СПЛАВОВ КАДМИЯ С ОЛОВОМ И СПЛАВА ВУДА ПРИ ПЛАВЛЕНИИ

Изучение теплопроводности сплавов эвтектической системы при плавлении представляет несомненный интерес для теории плавления и жидкого состояния. Кроме того, ввиду сравнительно малой величины температуры плавления, их удобно использовать в качестве теплоносителя. Однако до сих пор в литературе встречаются измерения теплопроводности при плавлении лишь для двух эвтектических сплавов систем $K-Na$ и $Pb-Bi$.

Нами проведено измерение теплопроводности для нескольких сплавов системы кадмий—олово при концентрациях кадмия меньших эвтектической. Эвтектический состав этой системы соответствует 32,25 вес % Cd . В твердом состоянии эта система обнаруживает фазовое превращение при $128^{\circ}C$ и концентрациях от 2% Cd до 98% Cd . Измерение теплопроводности проведено нами плоским методом при стационарном тепловом режиме, являющемся разновидностью метода, разработанного Х. И. Амирхановым [1941, 1944, 1949]. Принципиальная схема нашей установки приведена на рис. 1.

Описание экспериментальной установки

Образец в твердом состоянии, помещенный в асбоцементовое кольцо, зажимается между основным нагревателем и холодильником. Основной нагреватель с боковой поверхности и основания окружается двумя вспомогательными нагревателями, которые компенсируют тепловые потери. Контроль компенсации осуществляется при помощи дифференциальных медь—константановых термопар. Вспомогательный нагреватель со стороны основания печки вместе с соответствующей контрольной термопарой изолирован от прибора слюдяной прокладкой. Вокруг прибора циркули-

ровала вода от ультратермостата системы Гепплера, который позволял поддерживать во время опыта температуру медной оболочки прибора с точностью до $0,01^{\circ}\text{C}$.

Одна из контрольных дифференциальных термопар выполнена в виде составной пластинки, сложенной из константановой и медных пластинок. Другая боковая термопара представляла состав-

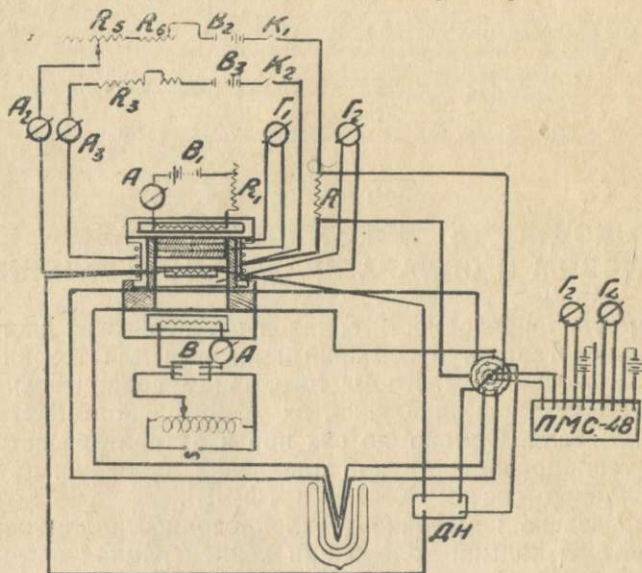


Рис. 1.

ной полый цилиндр из красной меди и константана. Внутри этого цилиндра плотно входит медный стаканчик с основным нагревателем. Медные провода, идущие от стаканчика и от наружного медного цилиндра, присоединяются к высокочувствительному низкоомному гальванометру М 21/4, при помощи которого контролируется компенсация теплообмена через боковую поверхность печки. При помощи другого гальванометра М 25/3, к которому присоединены медные провода, идущие от другой контрольной термопары, контролируется компенсация потери тепла через основание печки.

Точность компенсации побочных потерь тепла, составлявшая около 1% по отношению к расчетному количеству тепла, определялась нижеследующим образом. Зеркальный гальванометр М 21/4, которым контролировалась компенсация потери тепла через боковую поверхность, имел сопротивление $R=7,9$ ома, чувствительность по току $I=2,2-7,3 \cdot 10^{-9} \frac{\text{а}}{\text{м.м}}$, чувствительность по напряжению $V=0,12-0,06 \cdot 10^{-6} \frac{\text{в}}{\text{м.м}}$. Если принять во внимание, что от-

клонения зайчика гальванометра от нуля не превышали $\pm 1,5$ мм, т. е. 0,18 мкв, то перепад температуры на боковой медь—константановой термопаре не превышал при $100^\circ\text{C} \sim 0,004^\circ$. Для контроля компенсации теплообмена через верхнее основание нами использован другой зеркальный гальванометр М 25/3, сопротивление которого $R=13$ ом, чувствительность по току $I=8,4 \cdot 10^{-9} \frac{\text{а}}{\text{мм}}$ и чувствительность по напряжению $V=0,39 \cdot 10^{-6} \frac{\text{в}}{\text{мм}}$. Таким образом, перепад температур на верхней медь—константановой термопаре не превышает $0,013^\circ\text{C}$.

Теплообмен основной печи с окружающей средой определяется по формуле:

$$\Delta Q = \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta S = \frac{\lambda}{\Delta x} (\Delta t_1 \Delta S_1 + \Delta t_2 \Delta S_2),$$

где λ — теплопроводность константана, Δx — толщина стенки константанового цилиндра и пластинки; ΔS_1 — площадь цилиндра; ΔS_2 — площадь торцевой поверхности пластинки; Δt_1 и Δt_2 — перепады температур на толщине стенки константанового цилиндра и на толщине пластинки, которые могут иметь место из-за неточности компенсации. Подставляя численные значения: $\lambda=0,06 \frac{\text{кал}}{\text{см сек град}}$ (при 100°C), $\Delta x=0,2$ см, $\Delta t_1=0,004^\circ\text{C}$; $\Delta t_2=0,013^\circ\text{C}$, $\Delta S_1=9,42$ см² и $\Delta S_2=3,80$ см², получим: $\Delta Q=0,027$ кал/сек, что составляет около 0,94% при рабочей мощности основного нагревателя, равной 2,97 кал/сек.

Надежность компенсации побочных потерь тепла от печи проверялась еще следующим путем. Включая печку со стороны холодильника, добивались нулевых положений зайчиков от гальванометров, служащих для контроля компенсации тепловых потерь, после чего измерялись показания обеих термопар на образце для определения градиента температуры. При точной компенсации тепловых потерь показания обеих термопар должны были быть одинаковыми. Действительно, проведенные нами такие проверки показали или полное отсутствие градиента на образце, или незначительный градиент порядка 1—1,5% по отношению к расчетному градиенту температуры. Это находится в удовлетворительном согласии с расчетами, проведенными по поводу теплообмена основной печи с окружающей средой.

Регулировка силы тока как основного нагревателя, так и вспомогательных, осуществлялась с помощью реостатов грубой и точной регулировки. Для достижения стационарного теплового режима обычно требовалось время от 20 мин. до 1 часа, в зависимости от величины температуры, при которой проводился опыт. Несколько большего промежутка времени требовали измерения вблизи то-

чки плавления или в области перехода тела из одной фазы в другую (1—1,5 часа).

Для измерения градиента температуры на образце применялись термопары из медной и константановой проволоки, проградуированные в институте физики Дагестанского филиала Академии Наук СССР. Измерения температур и мощности нагревателя проводились потенциометрически при помощи потенциометра КМС—48. Общий вид установки приведен на рис. 2.

Изготовление образцов и проведение измерений

Образцы изготавливались путем плавления исходных металлов в фарфоровых или графитовых тиглях под слоем древесного угля во избежание окисления. Форма, в которую отливались расплавы для

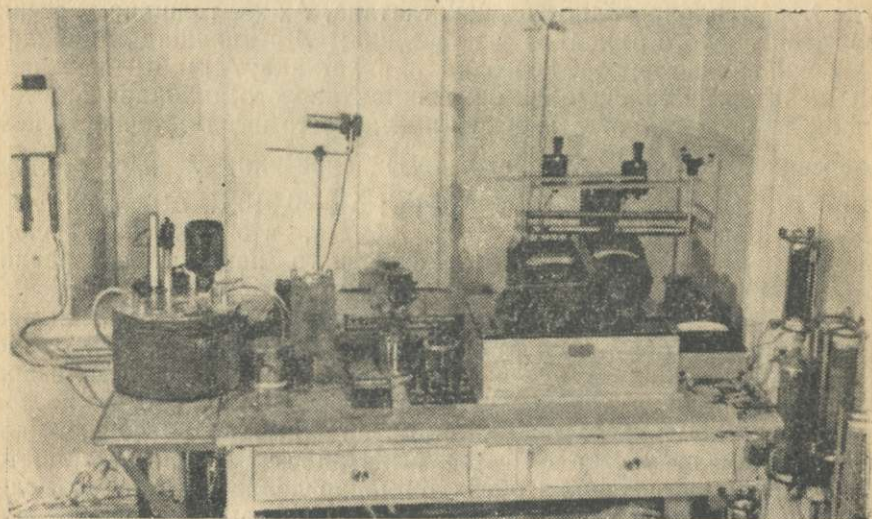


Рис. 2.

получения образцов, изображена на рис. 3. При помощи этой же формы производились шлифовка и полировка торцевых поверхностей образцов. При шлифовке и полировке применялись наждачные порошки различных размеров зерна. Перед измерениями образцы подвергались отжигу для устранения возможных деформаций. Площадь торцевой поверхности образца составляла $3,80 \text{ см}^2$, толщина около 8 мм. После обработки на станке в образце вытачивались узкие канавки, в которые помещались термопары. За рабочую толщину образца принималось расстояние между спаями термопар. Провода термопар помещались в узкие кварцевые капил-

ляры, за исключением спаев, которые были расположены по оси образца и имели тесные контакты с образцом. Испытанные нами образцы со спаями термопар химически не реагировали. Во избежание химического взаимодействия образца жидкого металла с поверхностями печки и холодильника использовались тонкие слои графита. Эти слои между образцом, печкой и холодильником не допускали прилипания образца к печке и холодильнику, устраняли окисления образцов при высоких температурах и осуществляли надежный контакт образца

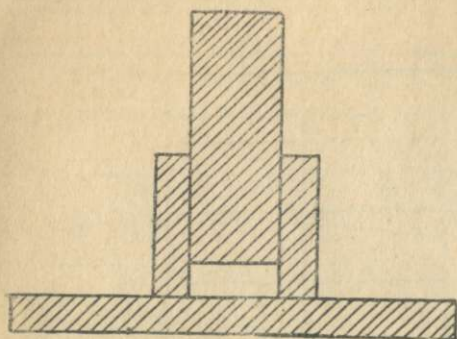


Рис. 3.

с печкой и холодильником как в твердом, так и в жидком состоянии. Асбоцементное кольцо, в которое помещался образец, имело, кроме прорезей для термопар, небольшую выемку у верхнего края, куда поступали излишки металла при расплавлении в жидком состоянии.

Коэффициент теплопроводности для каждой данной температуры определялся при достижении стационарного условия, исходя из равенства мощ-

ности основной печки и количества тепла, прошедшего через образец за единицу времени:

$$\lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta S = 0,24 \frac{V_0 V}{R_0},$$

откуда

$$\lambda = \frac{0,24 \cdot \Delta x}{R_0 \Delta S} \frac{V_0 V}{\Delta t},$$

где Δx — толщина образца, S — площадь поперечного сечения его, R_0 — образцовое сопротивление, V_0 и V — падение напряжения на образцовом сопротивлении и на основной печке, Δt — перепад температуры на образце. Перепад температур на образцах составлял $2 \div 4^\circ$ в твердом состоянии, $3 \div 4^\circ$ в области плавления и $5 \div 10^\circ$ в жидком состоянии. Суммарные ошибки измерения составляли $2 \div 5\%$ в зависимости от температуры опыта и фазового состояния сплавов.

Результаты измерения

Результаты измерения теплопроводности для сплавов—4,79% Cd + 95,16% Sn и 15,05% Cd + 84,91% Sn и 29,67% Cd + 70,31% Sn представлены соответственно на рис. 4, 5, 6. Переломы, наблюдаемые на кривых около 128°C , очевидно, связаны с фазовым превращением в твердом состоянии.

В области плавления теплопроводность постепенно уменьшается, так как доля жидкой фазы по мере плавления увеличивается за счет твердой фазы. Причем эти уменьшения теплопроводности для разных образцов протекают в областях различных протяженностей в соответствии с расстоянием между солидусом и ликвидусом диаграммы состояния этой системы. Следует учесть, что линия солидуса диаграммы состояния, соответствующая области

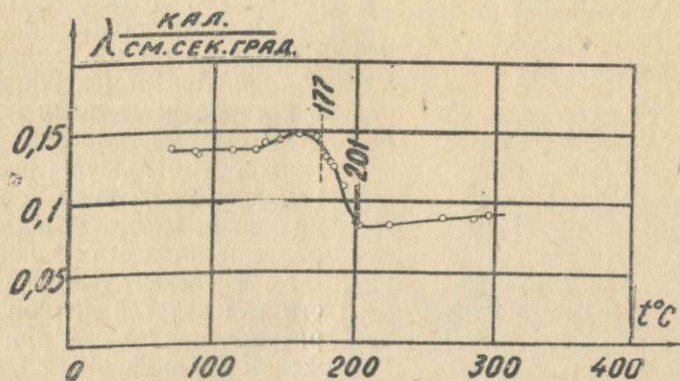


Рис. 4.

твердого раствора кадмия в олове, проведена пунктиром, что означает отсутствие надежных данных для этой линии. Таким образом, наши данные по теплопроводности при плавлении могут служить для уточнения диаграммы состояния системы наряду с другими методами. Например, по нашим данным теплопроводности, можно уточнить до сих пор окончательно не установленную линию солидуса в области твердого раствора кадмия в олове.

При переходе из твердого состояния в жидкое теплопроводность образцов уменьшается в следующем отношении.

Содержание Cd в %: 4,79 7,71 15,05 24,24 29,67

$$\frac{\lambda_{ж}}{\lambda_{тв}}: 1,98 \quad 2,00 \quad 1,87 \quad 2,13 \quad 2,24.$$

Как видно, отношение теплопроводности в твердом состоянии к теплопроводности в жидком примерно равно двум, т. е. такое же, как для олова и большинства металлов [Рао, 1942]. Уменьшение теплопроводности в жидком состоянии можно объяснить изменением структуры ближнего порядка и координационного числа. Работы, посвященные исследованию структуры жидких сплавов системы Cd—Sn, пока отсутствуют. Но имеются работы по исследованию структуры других эвтектических систем, так, например, Sn—Zn, Pb—Zn [Данилов, 1956, Скришевский, 1957] и др. Согласно вы-

водам этих авторов в жидких эвтектических сплавах существуют микрообласти размерами 25—50 Å, в которых преобладает тот или другой компонент, т. е. области квазиэвтектической структуры. Кривая интенсивности рассеяния рентгеновых лучей жидкого сплава

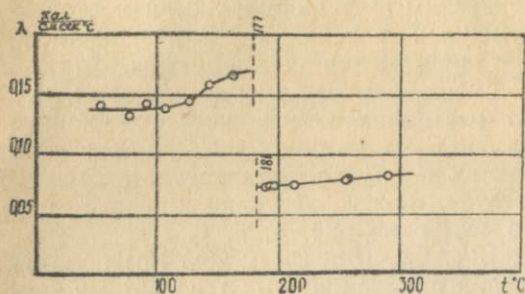


Рис. 5.

получается как результат наложения соответствующих кривых для компонентов. Такая же картина, по-видимому, имеет место и в случае системы кадмия с оловом.

Незначительность изменения теплопроводности сплавов кадмия с оловом при плавлении показывает, что эти изменения выз-

ваны не нарушениями дальнего порядка, которого не существует в жидкой фазе, а изменениями в ближней координации атомов — изменениями координационного числа для атомов того и другого компонента. На изменении теплопроводности сказывается также изменение межуатомных расстояний и плотностей. Этим можно объяснить наблюдаемое увеличение отношения $\lambda_{тв}/\lambda_{ж}$ по мере увеличения концентрации кадмия.

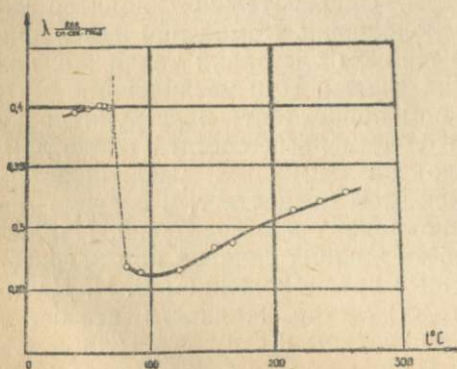


Рис. 6.

Изменение теплопроводности кадмия при плавлении значительно больше (2,4) по сравнению с изменением для олова (1,7) [Рао, 1942]. Общее координационное число кадмия при плавлении согласно рентгеноструктурным исследованиям остается без изменения, но происходит некоторая перегруппировка атомов между двумя ближайшими координационными сферами, в результате которой межуатомные расстояния увеличиваются. Та-

ким образом, изменение теплопроводности нельзя объяснить изменением лишь в координационном числе, но это изменение происходит вследствие изменения плотностей в жидком и твердом состояниях. Действительно, уменьшение плотности кадмия при плавлении составляет 4,7%, а олова — 3%. [Варгафтик (ред). 1956].

Наши измерения показывают, что теплопроводность жидких

сплавов медленно увеличивается с температурой. Это, видимо, связано с увеличением координационного числа атомов в сплавах по мере нагревания, которое установлено структурными исследованиями. А. И. Бублик и А. Г. Бунтарь [1958] при изучении изменения структуры ближнего порядка в расположении атомов жидкого сплава Sn—Al электронографическим путем обнаружили постепенное уменьшение числа одноименных соседей и увеличение числа разноименных соседей по мере повышения температуры. Иначе, при нагревании облегчается смешиваемость между атомами, что приводит сплав в однородное состояние. Общее координационное число увеличивается от 8 при 540°C до 9,6 при 700°C. Аналогичное явление происходит, возможно, и в случае сплавов системы кадмий—олово, которое способствует росту теплопроводности при повышении температуры, что видно из рис. 4, 5, 6.

Сплав Вуда (38 вес. % Bi, 13% Cd, 13% Sn и 26% Pb) обладает довольно низкой температурой плавления (70°C) и поэтому также представляет интерес с точки зрения использования его в качестве теплоносителя. Поэтому мы считали целесообразным измерение теплопроводности этого сплава при плавлении.

Результаты наших измерений теплопроводности сплава Вуда в твердом и жидком состоянии приведены на рис. 7. Отношение $\lambda_{тв}/\lambda_{ж}$ для этого сплава равно 1,55. Это показывает, что при плавлении изменение теплопроводности для этого сплава сложного состава примерно такое же, как и в чистых металлах и бинарных сплавах. В жидком состоянии теплопроводность также постепенно увеличивается с повышением температуры. Следовательно, характер изменения ближнего порядка в расположении атомов при плавлении и при дальнейшем нагревании в жидком состоянии такой же, как и в случае простых металлических систем. При увеличении температуры жидкого сплава Вуда в нем происходят перегруппировки атомов различных сортов: число одноименных соседей около данного атома уменьшается, а число разноименных увеличивается. Общее координационное число при этом возрастает, и система постепенно переходит в более плотноупакованное состояние. Наблюдаемое увеличение теплопроводности жидких сплавов при нагревании находится в хорошем согласии с предположением В. И. Данилова и И. В. Радченко о том, что структура жидкости все более приближается при повышении температуры к структуре одноатомной жидкости, подобной ртути [1956].

В заключение выражаю благодарность академику АН Азербайджанской ССР Х. И. Амирханову за предложение темы и консультации в работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амирханов Х. И. Известия АН СССР, серия физ., т. V, 1941.
 2. Амирханов Х. И. Журнал exper. и теор. физики, вып. 6, 1944.
 3. Амирханов Х. И. Изв. АН Азерб. ССР, т. IV, 1949.
 4. Варгафтик Н. В. (Ред.) Теплофизические свойства веществ. Справочник, Госэнергоиздат, 1949.
 5. Бублик А. И. и Бунтарь А. Г. Кристаллография, т. 2, вып. 1, 1958.
 6. Данилов В. И. Строение и кристаллизация жидкостей, Киев, 1956.
 7. Скрышевский А. Ф. Вопросы физики металлов и металловедения, вып. 8, 1957, стр. 187.
 8. Rao R. Indian J. Phys. 1942, v. 16, S. 155.
-

Г. Б. БАГДУЕВ, А. А. ВАЛИЕВ, М. А. КАЖЛАЕВ, И. К. КАМИЛОВ

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТЕЛЛУРИДА СВИНЦА

Значительная величина отношения подвижности носителей тока к фоновой теплопроводности у теллурида свинца благоприятствует применению этого полупроводника в термоэлектрических устройствах [6]. Это обстоятельство побудило нас заняться исследованием теплопроводности РвТе в широком температурном интервале: от 90°K до 600°K .

Для измерения коэффициента теплопроводности мы пользовались плоским компенсационным прибором, описанным в предыдущих работах [1]. Все исследованные нами образцы РвТе были спрессованы из порошка в форме параллелепипеда при температуре 500°C под давлением 360 кг/см^2 . Толщина образцов в направлении прохождения теплового потока составляла $0,3\text{--}0,5 \text{ см}$, а площадь перпендикулярная потоку — 2 см^2 . Такое соотношение толщины к площади образца имеет то преимущество, что боковые потери, связанные как с излучением, так и теплопроводностью окружающей среды, оказываются незначительными.

В предыдущих работах было показано, что ошибки на боковые потери не превышают $0,5\%$ от общего потока тепла, идущего по образцу, а все остальные погрешности также дают в сумме ошибку, не превышающую $4\text{--}6\%$. Эта ошибка считается в настоящее время незначительной для измерений теплопроводности полупроводников и изолирующих кристаллов.

Результаты измерения коэффициента теплопроводности наших образцов приведены на рис. 1 и 2.

Кривые показывают, что температурная зависимость теплопроводности ниже 360°K подчиняется закону $\lambda \sim 1,3T^{-1}$. Это свидетельствует о том, что преимущественным механизмом переноса тепловой энергии в Рв Те при низких температурах является тепловая диффузия фононов, как это имеет место и в других кристаллах, в которых число электронов мало. Хотя в теплопроводности

сти участвуют и носители заряда, вызывающие рост самой величины коэффициента теплопроводности, но температурный ход $\lambda_{\text{общ}}$ от этого не меняется.

Выше 360°K экспериментальные значения теплопроводности следуют более слабой температурной зависимости, чем T^{-1} . Отступление

от линейного закона по мере повышения температуры возрастает. Указанное отступление может быть интерпретировано следующим путем: общую теплопроводность $\lambda_{\text{общ}}$ можно представить как сумму двух аддитивных слагаемых

$$\lambda_{\text{общ}} = \lambda_{\phi} + \lambda_{\varepsilon}, \quad (1)$$

где λ_{ϕ} — фононная доля теплопроводности, которая подчиняется закону Эйнена $\lambda_{\phi} =$

$= \frac{c}{T}$, а λ_{ε} — электронная

теплопроводность, выражаемая соотношением Видемана—Франца $\lambda_{\varepsilon} = 2 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T \cdot \sigma$

(k — постоянная Больцмана, e — заряд электрона, T — абсолютная температура, σ — электропроводность). Так как у теллурида свинца электропроводность с ростом температуры падает по закону $\sigma \sim T^{-1}$, то λ_{ε} почти не меняется для различных температур:

Общая теплопроводность

$$\lambda_{\text{общ}} = \frac{C}{T} + 2 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T \sigma \quad (2)$$

с температурой изменяется по закону $\lambda \sim T^{-1}$ до тех пор, пока в соотношении (2) первый член велик по сравнению со вторым. Но когда первый член уменьшаясь становится сравнимым со вторым, тогда общая теплопроводность перестает подчиняться линейному закону ($\lambda \sim T^{-1}$); наступает более слабая зависимость от температуры.

Результаты нашей работы удовлетворительно согласуются как с расчетными данными Прайса [4], так и со значениями теплопроводности, полученными японцами Риро и Ни на основании измерений температуропроводности [5], но дают значительные расхождения с данными работы Е. Д. Девятковой [2].

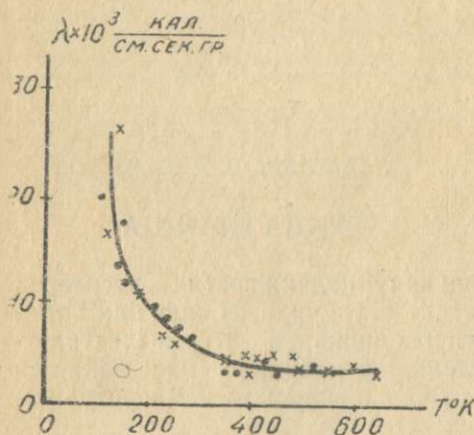


Рис. 1. Температурная зависимость теплопроводности РвТе. Точками и крестиками показаны значения теплопроводности для различных образцов.

Результаты измерений указанного автора показывают, что выше 200°K тепловое сопротивление PbTe заметно отклоняется от прямолинейной температурной зависимости в сторону уменьшения. В связи с этим автор высказал предположение о наличии экситонного механизма теплопроводности в теллуристом свинце.

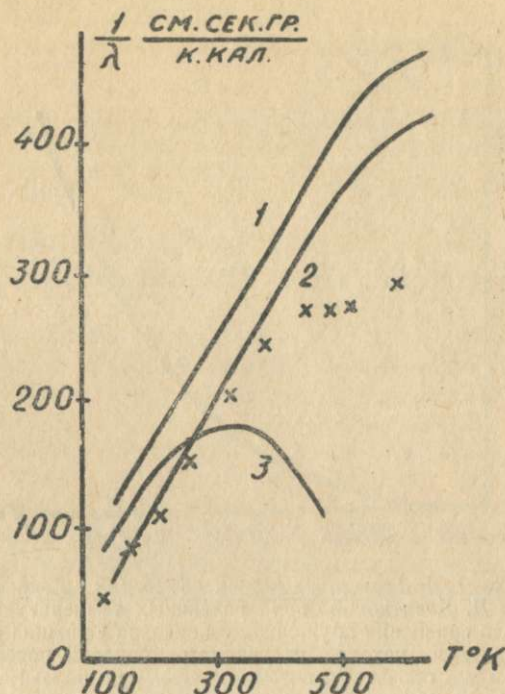


Рис. 2. Сравнение наших данных теплового сопротивления с теоретическими данными других авторов: кривая 1 показывает теоретические значения теплового сопротивления, кривая 2—данные Риро и Ни; кривая 3 — данные Е. Д. Девятковой. Точками обозначены данные наших измерений.

Е. Д. Девяткова получила отступление от закона $\lambda \sim T^{-1}$ на 160% ниже, чем в наших опытах. Более внимательный анализ методики работы Е. Д. Девятковой позволяет заключить, что причина преждевременного отступления $\lambda_{\text{общ}}$ от закона $\lambda \sim T^{-1}$, по-видимому, кроется не в участии экситонов в переносе тепловой энергии, а в наличии неучтенной автором погрешности при измерении теплопроводности. В самом деле, Девяткова пользуется для измерения

коэффициента теплопроводности методикой, которая описана в работе [3]. Измерения коэффициента теплопроводности производились на образцах с размерами $l=1$ см и $S=1$ см², зажатых между двумя металлическими блоками, один из которых служил холодильником, а другой—нагревателем. Вся система была помещена в металлический цилиндр, из которого откачивался воздух.

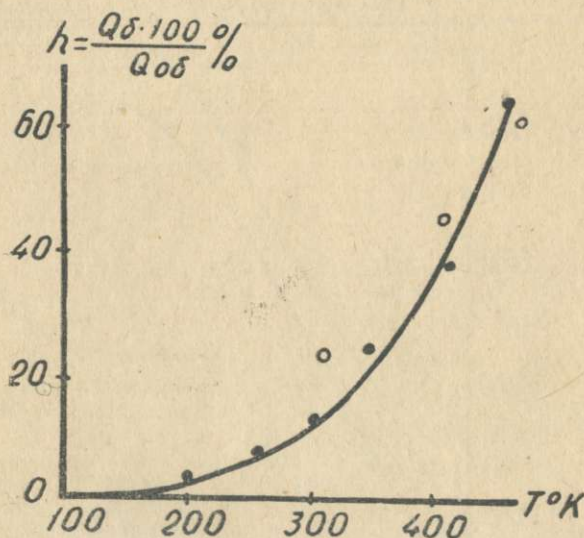


Рис. 3. Расхождение наших измерений с данными Е. Д. Девятковой при различных температурах. Для сравнения кружочками показана величина отношения потока, излучаемого боковой поверхностью образца, к потоку, идущему по образцу (в процентах) в опытах Е. Д. Девятковой.

Пространство между образцом и стенкой цилиндра было свободно, что создавало условия, благоприятные для теплообмена излучением от образца к стенке (или наоборот). Так как автором, по видимому, не были приняты меры к устранению погрешностей, связанных с боковым излучением образца (в статье об этом ничего не говорится), то мы можем считать, что температура цилиндра была ниже, чем средняя температура образца, по крайней мере на $\frac{t_1+t_2}{2} - t_2$ градусов (считая, что стенка цилиндра имеет температуру холодного конца образца) и тепловой поток через излучение имел направление от поверхности образца к стенке цилиндра. Здесь t_1 и t_2 — температуры горячего и холодного концов образца.

Указанный поток можно оценить по формуле:

$$Q_{\sigma} = A\sigma[T_1^4 - T_2^4]S_{\sigma},$$

где A — коэффициент теплоизлучения (считая условия излучения поверхности образца РвТе близкими к излучению серого тела, A принят равным 0,5), σ — постоянная Стефана — Больцмана, T_1 и T_2 — абсолютная температура излучающей и поглощающей поверхности, S_{σ} — боковая поверхность образца. За T_1 в данном случае можно принять среднюю температуру образца, т. е. $\frac{t_1+t_2}{2}$;

T_2 — температура стенки цилиндра, окружающего образец.

Подсчет, проведенный для самого неблагоприятного в смысле излучения случая (при $\frac{t_1+t_2}{2} - t_2$) показывает, что относительная погрешность излучения $\eta = \frac{Q_{\sigma}}{Q_{обп}} \cdot 100\%$ для температуры 200°К составляет не более 5%, а для температуры 450°К — больше 60%.

Приведенная погрешность приводит к отступлению экспериментального хода теплопроводности от теоретического.

Указанное отступление тем больше, чем выше температура. На рисунке 3 дано сравнение температурного роста относительной величины бокового излучения к величине потока, проходящего по образцу (сплошная кривая), и расхождения экспериментальных данных Девятковой от рассчитанных по формуле (2) (точки). Хорошее совпадение точек с кривой свидетельствует о том, что аномальное изменение коэффициента теплопроводности обязано погрешностям в измерении, а не экситонам, как утверждает автор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амирханов Х. И., Багдурев Г. Б. и Кажлаев М. А. Теплопроводность теллура. (В печати).
2. Девяткова Е. Д. ЖТФ, т. XXVII, вып. 3, 1957.
3. Девяткова Е. Д., Сильбанс Л. С. ЖТФ, т. XXVII, вып. 6, 1952, стр. 968.
4. Price. Phil. Mag, т. 46, 1955, стр. 1252.
5. Riro Nii. J. Phys Soc. Japan, т. 13, № 7, 1958, стр. 769.
6. Ставицкая Т. С. и Сильбанс А. С. ЖТФ, т. XXVIII, вып. 3, 1958.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА И ГЕОДЕЗИЯ

П. Н. Князев. О некоторых неравенствах для ограниченных само- сопряженных операторов в гильбертовом пространстве	3
Б. А. Зейналов. Решение матричного уравнения $AX=XB$ в це- лочисленных матрицах	11
М. М. Гехтман. Разложение положительно определенных ядер с p -кратным интегрированием	19
И. В. Ценов. Обобщение задачи о наилучшем приближении функ- ции в пространстве L^s	25
А. Е. Сержанов. Прямая геодезическая задача	39
Ф. А. Коршак. Наземная щелевая фотограмметрическая съемка	51

ФИЗИКА

А. А. Бабаев. Изменение термоэлектродвижущей силы монокри- сталла теллура в магнитном поле	75
Б. П. Пашаев. Электрические и тепловые свойства сплавов систе- мы кадмий—олово	83
Б. П. Пашаев. Теплопроводность некоторых сплавов кадмия с оловом и сплава вуда при плавлении	97
Г. Б. Багдуев, А. А. Валиев, М. А. Кажлаев, И. К. Камилов. Теплопроводность теллурида свинца	107

47 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА