ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В И. ЛЕНИНА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ X

МАХАЧКАЛА * 1961

ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ X

Физико-математические
и технические науки

МАХАЧКАЛА • 1961

Печатается по Постановлению Совета Дагестанского государственного университета имени В. И. Ленина.

Редакционная коллегия: **М.** С. **Бежаев** (отв. редактор), **М-Ш. И. Амирханов, Ф. А. Коршак, Х. И. Таймуразов, А. З. Эфендиев.**



204824

ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. В. И. ЛЕНИНА

1961 УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ Том X

Б. А. Зейналов

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ $KX = XK$ В УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦАХ

Постановка задачи. Даны две подобные целочисленные матрицы A и B порядка n. Найти целочисленные унимодулярные матрицы, трансформирующие матрицу A в B, т. е. найти унимодулярные решения матричного уравнения $AX = XB$.

Как известно, не для любых двух подобных матриц существует решение этой задачи [1]. Например, в этом можно убедиться на следующем примере.

Матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

подобны. Все целочисленные матрицы, удовлетворяющие уравнению $AX = XB$, имеют вид

$$X = \begin{bmatrix} x, & y, & z \\ -x, & -z, & y \\ x, & -y, & -z \end{bmatrix},$$

где x, y, z — суть произвольные целые числа. Так как определитель матрицы X равен $|X| = 2x(y^2 + z^2)$, то не существует унимодулярной (целочисленной) матрицы, трансформирующей матрицу A в B.

В том случае, когда для данных подобных матриц A и B существует целочисленная унимодулярная матрица, трансформирующая матрицу A в B, будем называть эти матрицы унимодулярно подобными. (В [1] такие матрицы называются подобными в узком смысле). Отношение унимодулярного подобия,

как легко проверить, обладает свойствами: рефлективности, симметричности и транзитивности. Тем самым, каждый класс подобных целочисленных матриц порядка n распадается на непересекающиеся классы унимодулярно подобных матриц.

Ниже рассматривается вопрос о решении матричного уравнения $KX = XK$ в унимодулярных матрицах, где K — естественная нормальная форма любой целочисленной матрицы третьего порядка.

При $n = 3$ существует три типа естественной нормальной формы матрицы, которые имеют вид:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -q & -p \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{bmatrix}.$$

Матрицы K_1, K_2 и K_3 имеют соответственно следующие инвариантные множители: $e_1(\lambda) = \lambda - \lambda_1$, $e_2(\lambda) = \lambda - \lambda_1$, $e_3(\lambda) = \lambda - \lambda_1$; $e_1(\lambda) = 1$, $e_2(\lambda) = \lambda - \lambda_1$, $e_3(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$; $e_1(\lambda) = 1$, $e_2(\lambda) = 1$, $e_3(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$, и минимальные полиномы $\psi_1(\lambda) = \lambda - 1$, $\psi_2(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$, $\psi_3(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$.

1. Уравнению $K_1X = XK_1$ удовлетворяет любая целочисленная матрица третьего порядка (K_1 — скалярная матрица). Поэтому, искомым решением является множество всех унимодулярных матриц третьего порядка.

2. Матричное уравнение $K_2X = XK_2$ равносильно двум следующим системам векторных уравнений [3]

$$X_1(K_2 - \lambda_1 E) = 0; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} X_2(-K_2) + X_3 &= 0, \\ X_2(-qE) + X_3(-pE - K_2) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где E — единичная матрица третьего порядка, $X_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$, $X_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})$, $X_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33})$ — строки целочисленной матрицы $X = [x_{ij}]$.

Решим системы (1) и (2) в целочисленных векторах. Из (1), замечая, что ранг матрицы $K_2 - \lambda_1 E$ равен 1, находим целочисленный вектор $X_1 = (x, -\lambda_2 y, y)$, где λ_2 корень $\psi_2(\lambda)$; x, y — произвольные целые числа. Далее, из первого уравнения системы (2), находим $X_3 = X_2K_2$. Векторы X_2 и $X_3 = X_2K_2$, где X_2 — произвольный целочисленный вектор, удовлетворяют второму уравнению системы (2). В самом деле, имеем:

$$X_2(-qE) + X_3(-pE - K_2) = X_2(-qE) + X_2(-pK_2 - K_2^2) =$$

$$X_2(-qE - pK_2 - K_2^2) = X_2[-\psi_2(K_2)].$$

Но, так как матрица K_2 является корнем своего минимального полинома $\psi_2(\lambda)$, то $\psi_2(K_2)$ есть нулевая матрица, что и доказывает утверждение. Векторы X_2 и X_3 имеют вид: $X_2 = (u, v, w)$, $X_3 = (\lambda_1 u, -qw, v - pw)$, где u, v, w — произвольные целые числа.

Таким образом, общее целочисленное решение уравнения $K_2X = XK_2$ имеет вид:

$$X = \begin{bmatrix} x, & -\lambda_2 y, & y \\ u, & v, & w \\ \lambda_1 u, & -qw, & v - pw \end{bmatrix},$$

где λ_1, λ_2 — корни полинома $\psi_2(\lambda)$, $p = -(\lambda_1 + \lambda_2)$, $q = \lambda_1\lambda_2$. Вычислим определитель матрицы X:

$$|X| = \begin{vmatrix} x, & -\lambda_2 y, & y \\ u, & v, & w \\ \lambda_1 u, & -\lambda_1\lambda_2 w, & v + (\lambda_1 + \lambda_2) w \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x, & 0, & y \\ u, & v + \lambda_2 w, & w \\ \lambda_1 u, & \lambda_2 v + \lambda_2^2 w, & v + (\lambda_1 + \lambda_2) w \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x, & 0, & y \\ u, & v + \lambda_2 w, & w \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\, u, & 0, & v + \lambda_1 w \end{vmatrix} =$$

$$= (v + \lambda_2 w)\,[x(v + \lambda_1 w) - (\lambda_1 - \lambda_2)\, u\, y].$$

Предположим, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда, условие унимодулярности матрицы X будет:

$$(v + \lambda_2 w)\,[x(v + \lambda_1 w) - (\lambda_1 - \lambda_2)\, u\, y] = \pm 1.$$

Это уравнение равносильно системам $v + \lambda_2 w = \pm 1$, $x(v + \lambda_1 w) - (\lambda_1 - \lambda_2)\, u\, y = \pm 1$. Исключив из этой системы v, получим неопределенные уравнения вида

$$[\pm 1 + (\lambda_1 - \lambda_2) w]\, x - [(\lambda_1 - \lambda_2) u]\, y = \pm 1. \qquad (3)$$

Эти уравнения в целых числах разрешимы тогда и только тогда, когда w и u — произвольные целые числа, удовлетворяющие условию $[\pm 1 + (\lambda_1 - \lambda_2) w,\ (\lambda_1 - \lambda_2) u] = 1$. В частности, это условие имеет место при $w = u$.

Определив целые числа из этого условия и решив неопределенные уравнения (3) для этих значений, получим систему

значений w, u, x, y, $v = \pm 1 - \lambda_2 w$, для которых матрица X будет унимодулярным решением уравнения $K_2X = XK_2$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то условие унимодулярности матрицы X принимает вид $x(v + \lambda_1 w)^2 = \pm 1$ или $x = \pm 1$, $v + \lambda_2 w = \pm 1$.
Для системы значений x, v, w, определяемых из последних условий, матрица X будет унимодулярным решением уравнения $K_2X = XK_2$.

3. Рассмотрим, наконец, уравнение $K_3X = XK_3$. Это матричное уравнение равносильно следующей системе векторных уравнений

$$\begin{aligned} &X_1(-K_3) + X_2 = 0, \\ &X_2(-K_3) + X_3 = 0, \\ &X_1(-cE) + X_2(-bE) + X_3(-aE - K_3) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Из первых двух уравнений, имеем $X_2 = X_1K_3$, $X_3 = X_2K_3$, или $X_2 = X_1K_3$, $X_3 = X_1K_3^2$.

Векторы X_1, $X_2 = X_1K_3$, $X_3 = X_1K_3^2$, где X_1 — произвольный целочисленный вектор, удовлетворяют последнему уравнению системы (4).
В самом деле, имеем:

$$X_1(-cE) + X_2(-bE) + X_3(-aE - K_3) = X_1[-\psi_3(K_3)].$$

Но, так как матрица K_3 является корнем своего минимального полинома $\psi_3(\lambda)$, то $\psi_3(K_3)$ — нулевая матрица, что и доказывает утверждение.
Векторы X_1, $X_2 = X_1K_3$ и $X_3 = X_1K_3^2$ имеют вид:

$$X_1 = (x,\ y,\ z),$$

$$X_2 = (-cz,\ x - bz,\ y - az),$$

$$X_3 = (-cy + acz,\ -by + (ab - c)z,\ x - ay + (a^2 - b)z),$$

где x, y, z — произвольные целые числа.

Таким образом, общее целочисленное решение уравнения $K_3X = XK_3$ имеет вид:

$$X = \begin{bmatrix} x, & y & z \\ -cz, & x - bz & y - az \\ -cy + acz, & -by + (ab - c)z, & x - ay + (a^2 - b)z \end{bmatrix}.$$

Вычислив определитель этой матрицы, получим:

$$|X| = x^3 - ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (3c - ab)xyz + \\ + (b^2 - 2ac)xz^2 - cy^3 + acy^2z - bcyz^2 + c^2z^3.$$

Эта кубическая форма от трех переменных x, y, z есть нормовая форма, так как она совпадает с нормовой формой

$$f(x, y, z) = (x + \lambda_1 y + \lambda_1^2 z)\ (x + \lambda_2 y + \lambda_2^2 z)(x + \lambda_3 y + \lambda_3^2 z),$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — суть корни минимального полинома $\psi_3(\lambda)$ матрицы K_3.

Условие унимодулярности матрицы X будет

$$|X| = f(x, y, z) = \pm 1.$$

В зависимости от того, имеет ли минимальный полином $\psi_3(\lambda)$ матрицы K_3: трехкратный рациональный корень (целый), двукратный рациональный корень, три различных рациональных корня, один рациональный корень, ни одного рационального корня, решение в целых числах неопределенного уравнения $f(x, y, z) = \pm 1$ сведется к решению в целых числах уравнений соответственно видов:

$$(x + by + cz)^3 = \pm 1; \tag{5}$$

$$(x + by + cz)^2 (x + b_1 y + c_1 z) = \pm 1; \tag{6}$$

$$(x + by + cz)(x + b_1 y + c_1 z)(x + b_2 y + c_2 z) = \pm 1; \tag{7}$$

$$(x + by + cz)(x^2 + Bxy + Cxz + Dy^2 + Eyz + Fz^2) = \pm 1; \tag{8}$$

$$x^3 - ax^2 y + (a^2 - 2b)x^2 z + \cdots + c^2 z^3 = \pm 1. \tag{9}$$

Уравнения (5), (6), и (7) равносильны системам линейных уравнений [2]. Уравнение (8), исключением неизвестного, сводится к неопределенному уравнению второй степени с двумя неизвестными.

Наконец, уравнение (9) решается как нормовое уравненне.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. **Н. Г. Чеботарев**, Основы теории Галуа, часть 2, ОНТИ, 1937.

[2]. **Зейналов**, Критерий разрешимости произвольной системы линейных уравнений в целых числах. „Ученые записки ДГУ им. В. И. Ленина," том. V, 1960.

[3]. **Б. А. Зейналов**, Решение матричного уравнения AX = XB в целочисленных матрицах. „Ученые записки ДГУ им. В. И. Ленина", том VII, 1961.

ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА

1961 УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ Том X

А. Е. Сержанов

ИЗОБРАЖЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ ПРИ ЩЕЛЕВОЙ АЭРОФОТОСЪЕМКЕ

§ 1.

Исследованиями Ф. А. Коршака установлено, что при щелевой аэрофотосъемке прямая, произвольно расположенная в пространстве, изображается гиперболой [1]. Им же доказано аналитическими и геометрическими методами, что поверхность, проектирующая прямую, представляет собой гиперболический параболоид.

В силу нарушения линейности, изучение изображений кривых при щелевом проектировании представляет значительные трудности. Изучая проекции кривых, мы будем пользоваться методами аналитической афинной геометрии.

Примем следующие параметры щелевого проектирования (рис. 1): S — центр проекции, T — предметная плоскость, P — картинная плоскость, ASB — плоскость проектирующего пучка, AB — предметное основание проектирующего пучка, SO — ось проектирующего пучка.

Центр проекции S перемещается в направлении, указанном стрелкой; вместе с ним перемещается и картинная плоскость, кроме того, картинная плоскость

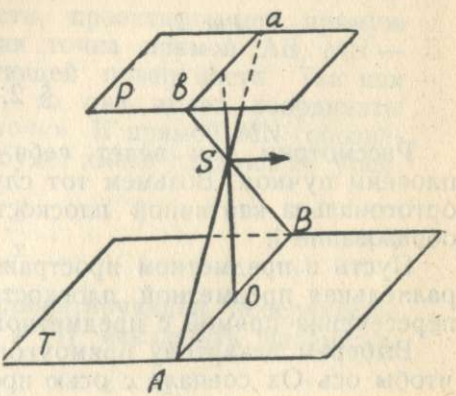


Рис. 1.

движется в том же направлении со скоростью v относительно S.

Траектория точки S называется осью проекции. Изображение на картинной плоскости получается с помощью плоского пучка ASB. Для практики наиболее важен случай, когда ось проекции параллельна предметной плоскости, ось пучка перпендикулярна предметному основанию проектирующего пучка, а сам пучок либо ортогонален плоскости T, либо наклонен к нему под произвольным углом α. Скорость картинной плоскости определяется по формуле

$$v = \frac{h}{H} V, \qquad (1)$$

где V — скорость точки S, а h и H — расстояние точки S соответственно от плоскостей P и T. Очевидно, геометрически проектирование плоским пучком сводится к произведению двух преобразований (рис. 2).

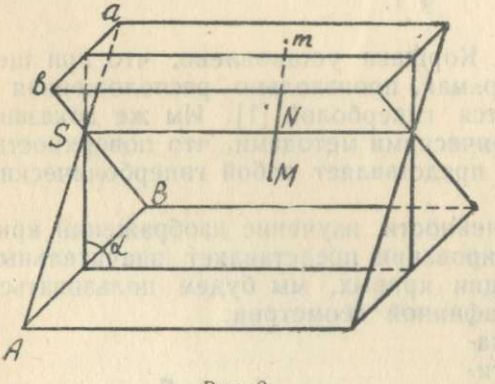


Рис. 2.

I. Всякая точка M фигуры, лежащей в предметном пространстве, проектируется на картинную плоскость лучом MN, пересекающим ось проекции и параллельным плоскости ASB.

II. Сжатием в картинной плоскости к прямой ab с коэффициентом сжатия

$$k = \frac{h}{H}. \qquad (2)$$

§ 2.

Рассмотрим как ведет себя прямая при проектировании плоским пучком. Возьмем тот случай, когда плоскость пучка ортогональна картинной плоскости. Рассмотрим сначала преобразование I.

Пусть в предметном пространстве дана прямая AB, не параллельная предметной плоскости (рис. 3). Здесь A — точка пересечения прямой с предметной плоскостью.

Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox совпала с осью проекции, ось Oz была перпендикулярна предметной плоскости, а ось Oy проектировалась в прямую, проходящую через точку A.

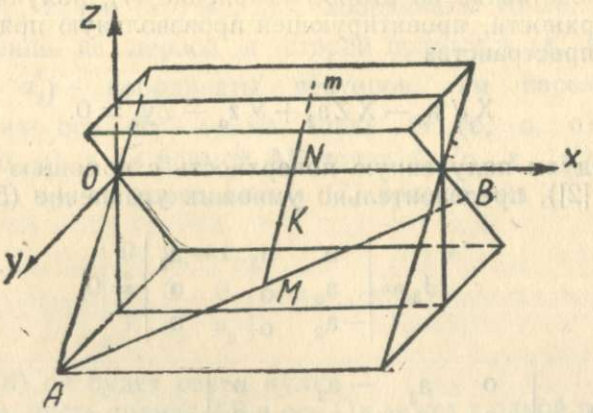


Рис. 3.

Уравнение прямой AB запишем в виде $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$, где (x_0, y_0, z_0) координаты точки, лежащей на прямой, (a_1, a_2, a_3) — координаты вектора, параллельного прямой. Точка A имеет координаты (o, y_0, z_0). Без ограничения общности можно считать $a_1 = 1$. Тогда уравнение прямой AB примет вид

$$\frac{x}{1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \qquad (3)$$

Выведем уравнение поверхности, проектирующей прямую AB. Пусть M (x, y, z) — текущая точка прямой AB, MN — текущая образующая проектирующей поверхности. Так как точка N лежит на оси проекции, то она имеет координаты (x, o, o). Текущие координаты точки K прямой MN обозначим так: (X, Y, Z). Прямая MN будет иметь следующие уравнения

$$X = x, \quad \frac{y}{y} = \frac{Z}{z}. \qquad (4)$$

Чтобы получить уравнение проектирующей поверхности, надо из четырех уравнений (3) и (4) исключить параметры x, y, z. Из уравнений $x = \frac{y - y_0}{a_2}$, $x = \frac{z - z_0}{a_3}$, $x = X$ находим

у, г и, подставляя во второе уравнение (4), получим уравнение поверхности, проектирующей произвольную прямую предметного пространства

$$XY\ a_3 - X2\ a_2 + Y2_0 - 2y_{,,} = 0. \qquad (5)$$

Исследуем полученную поверхность с помощью инвариантов (см. [2]), предварительно умножив уравнение (5) на 2.

$$\begin{matrix} & a_3 & -a_2 \\ & o & o \\ -a,, & o & o \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & o & O & o \\ -a,, & o & O & {}^{"}y_o \\ & 2,, & -y_o & O \end{matrix} = (a_3 y_o - a_2\ {}^{2}o)^2 -$$

Если $a_3 y_0 - a_2\ r_0 \neq 0$, то проектирующая поверхность — гиперболической параболоид.
Пусть

$$a_3 y_o " a_2\ {}^{2}{}_{,,} = o \qquad (6)$$

Для выяснения вида поверхности надо подсчитать $Л_2$ и $К_3$.. Так как

$$Л_2 = \begin{matrix} a_3 & o \end{matrix} + \begin{matrix} o & -a, \end{matrix} \qquad (a_2 + a_3) < «.$$

а $К_9 =$

$$\begin{matrix} o & a_3 & o \\ a_3 & o & {}^{2}o\ {}^{1} \\ o & {}^{2}o & {}^{0} \end{matrix} + \begin{matrix} -a_2 & o & {}^{"}y_o \\ {}^{o} & -y_o & o \end{matrix} + \begin{matrix} o & & o \\ o & & y_o \\ & & o \end{matrix} = o,$$

то проектирующая поверхность вырождается в пересекающиеся плоскости. Покажем, что условие (6) необходимо и достаточно, чтобы проектирующая поверхность проходила через ось проекции. Пусть условие (6) выполнено. Тогда прямая АВ и ось Ох будут лежать в одной плоскости. Действительно, для этого должно выполняться условие

$$\begin{matrix} x_o - x_o & y_o - y_o & o & o \\ & & a, & \end{matrix} = o, \qquad (7)$$

где (x_0, y_0, z_0) и (x_0', y_0', z_0') координаты точек, лежащих соответственно на первой и второй прямых, а (a_1, a_2, a_3) и и (a_1', a_2', a_3') — координаты векторов, им параллельных. Так как на оси Ox лежит точка O (o, o, o) и вектор $\bar{e}_1$ (1, o, o), а на прямой AB точка A (o, x_0, y_0) и вектор $\bar{a}$ (1, a_2, a_3), то определитель (7) примет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & y_0 & z_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_2 z_0 - a_3 y_0 \qquad (8)$$

и в силу (6) он будет равен нулю.

Обратно, пусть прямая AB и ось Ox лежат в одной плоскости. Тогда определитель (8) равен нулю и, следовательно, выполняется условие (6). Итак, только прямые, лежащие в плоскости, проходящей через ось проекции, будут проектироваться пересекающимися плоскостями.

В силу условия (6) $\frac{y_0}{a_2} = \frac{z_0}{a_3} = m$. Находя отсюда y_0 и z_0 и подставляя в (5), получим

$$(У a_3 - Z a_2)(X + m) = 0, \text{ или}$$

$$У a_3 - Z a_2 = 0, X + m = 0.$$

Первая плоскость проходит через ось проекций, вторая ей перпендикулярна и проходит через точку пересечения прямой AB с осью проекций Это ясно и геометрически, так как в этом случае точки M и N (см. рис 3) совпадут и проектирующие лучи MN образуют целую плоскость.

Для получения изображения прямой AB на картинной плоскости надо поверхность (5) пересечь плоскостью $Z = h$.

Получим $\begin{cases} XУa_3 - XZa_2 + У z_0 - Zy_0 = 0, \\ Z = h, \end{cases}$

или $\begin{cases} XУa_3 - Xha_2 + У z_0 - hy_0 = 0, \\ Z = h. \end{cases}$

На картинной плоскости прямая AB изображается уравнением:

$$XУa_3 - Xha_2 + У z_0 - hy_0 = 0. \qquad (9)$$

Исследуем его с помощью инвариантов, предварительно умножив обе части на 2.

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & a_3 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix} = -a_3^2 < 0; \quad J_3 = \begin{vmatrix} 0 & a_3 - ha_2 \\ a_3 & 0 \quad z_0 \\ -ha_2 & z_0 - 2hy_0 \end{vmatrix} = ha_3(a_3y_0 - a_2z_0).$$

Если $a_3 \neq 0$, $a_3 y_0 - a_2 z_0 \neq 0$, то прямая изобразится гиперболой; если $a_3 y_0 - a_2 z_0 = 0$, т. е., если прямая лежит в плоскости, проходящей через ось проекции, гипербола вырождается в пересекающиеся прямые; если $a_3 = 0$, то прямая лежит в плоскости, параллельной предметной и на картинной плоскости изобразится прямой. Легко видеть, что гипербола (9) равносторонняя с асимптотами, параллельными осям координат.

Итак, при преобразовании I прямая переходит либо в гиперболу, либо в прямую, либо в две пересекающиеся прямые. Преобразование II, являясь афинным преобразованием, может быть аналитически записано формулами:

$$x' = \frac{h}{H} X,$$

$$y' = Y. \tag{10}$$

Так как проектирование плоским пучком сводится к произведению преобразований I и II, то окончательно уравнение гиперболы, изображающей прямую предметного пространства, может быть записано в виде:

$$a_3 H x'y' - Hha_2 x' + h z_0 y' - h^2 y_0 = 0. \tag{11}$$

§ 3.

Рассмотрев изображение прямой при проектировании плоским пучком, естественно поставить вопрос о поведении при этом преобразовании кривой *n*-го порядка. Как и в § 2, рассмотрим сначала преобразование I.

Линию *n*-го порядка в пространстве зададим уравнениями:

$$\begin{cases} P(x, y, z) = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $P(x, y, z)$ — полином n-й степени, а $Ax + By + Cz + D = 0$ уравнение плоскости, в которой лежит кривая. Выбрав систему координат так, как и в § 2, выведем уравнение поверхности, проектирующей кривую (12) (см. рис. 4).

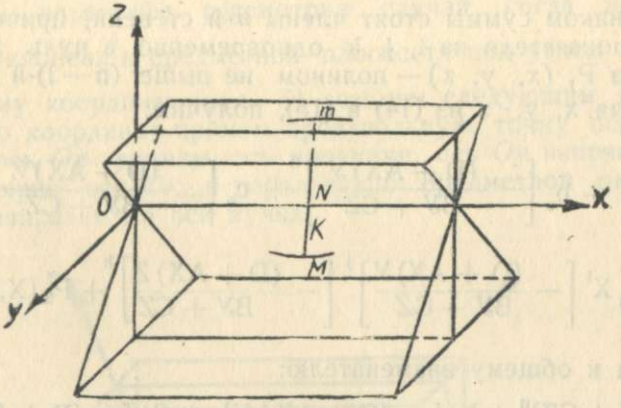


Рис. 4.

Здесь $M(x, y, z)$ — текущая точка на кривой, MN — текущая образующая проектирующей поверхности, а $K(X, Y, Z)$ — текущая точка поверхности (12).

Уравнения прямой MN

$$X = x, \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}. \tag{4}$$

Для того, чтобы получить уравнение проектирующей поверхности, надо из уравнений (12) и (4) исключить x, y, z. Для этого из уравнений

$$\begin{gathered} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x - X = 0, \\ \frac{y}{Y} - \frac{z}{Z} = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

Найдем x, y, z и подставим в $P(x, y, z) = 0$. Решая систему (13), получим

$$\begin{gathered} x = X; \\ y = -\frac{(D + AX)Y}{BY + CZ}; \\ z = -\frac{(D + AX)Z}{BY + CZ}. \end{gathered} \tag{14}$$

Уравнение $P(x, y, z) = 0$ запишем так:

$$a_0 x^n + b_0 y^n + c_0 z^n + \sum_{i+j+k=n} a_{ijk} x^i y^j z^k + P_1(x, y, z) = 0. \qquad (15)$$

Под знаком суммы стоят члены n-й степени, причем никаких два показателя из i, j, k одновременно в нуль не обращаются, а $P_1(x, y, z)$ — полином не выше $(n-1)$-й степени. Подставляя x, y, z из (14) в (15), получим:

$$a_0 X^n + b_0 \left[-\frac{(D + AX) У}{BУ + CZ} \right]^n + c_0 \left[-\frac{(D + AX) Z}{BУ + CZ} \right]^n +$$

$$+ \sum_{i+j+k=n} a_{ijk} X^i \left[-\frac{(D + AX) У}{BУ + CZ} \right]^j \left[-\frac{(D + AX) Z}{BУ + CZ} \right]^k + P_2(X, У, Z) = 0.$$

Приведем к общему знаменателю:

$$a_0 X^n [BУ + CZ]^n + b_0 [-(D + AX) У]_n + C_0 [-(D + AX) Z]^n +$$

$$+ \sum_{i+j+k=n} a_{ijk} X^i [-(D + AX) У]^j [-(D + AX) Z]^k [BУ +$$

$$+ CZ]^{n-(j+k)} + P_3(X, У, Z) = 0, \qquad (16)$$

причем $P_3(X, У, Z)$ полином не выше $(2n-1)$-й степени.

Итак, мы видим, что при преобразовании I, кривая n-го порядка, лежащая в предметном пространстве, проектируется поверхностью $2n$-го порядка. Так как преобразование II, являясь аффинным, не нарушает порядка поверхности, то при проектировании плоским пучком кривая n-го порядка проектируется поверхностью $2n$-го порядка.

Для того, чтобы получить изображение линии (12), надо пересечь ее плоскостью $Z = h$ и применить преобразование (10) Окончательно получим

$$a_0 H^n x'^n [By' + Ch]^n + b_0 [-(Dh + AHx')y']^n + c_0 [-(Dh +$$

$$+ AHx') h]^n + \sum_{i+j+k=n} a_{ijk} H^i x'^i [-(Dh + AHx')y']^j [-(Dh +$$

$$+ AHx') h]^k [By' + Ch]^{n-(j+k)} + P_4(x', y', h) = 0, \qquad (17)$$

где $P_4(x', y', h)$ полином не выше $(2n-1)$-й степени. Получим уравненне степени $2n$.

Итак, при проектировании плоским пучком кривая n-го порядка, лежащая в предметном пространстве в плоскости, не параллельной предметной, в картинной плоскости изобразится кривой $2n$-го порядка.

§ 4.

В предыдущих параграфах мы исследовали поведение кривых при проектировании плоским пучком, предполагая, что плоскость пучка перпендикулярна предметной плоскости.

В этом параграфе рассмотрим случай, когда плоскость пучка наклонена к предметной плоскости под углом $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Систему координат (рис. 5) возьмем следующим образом. За начало координат примем произвольную точку оси проекции, за ось Ox примем ось проекции, ось Oy направим перпендикулярно оси Ox и параллельно предметной плоскости, ось Oz направим по оси пучка.

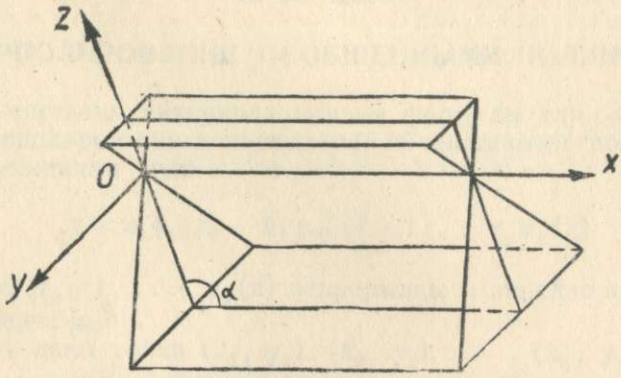


Рис. 5.

Так как ось пучка не перпендикулярна предметной плоскости, то система координат будет декартовой косоугольной.

Повторяя рассуждения, проделанные в §§ 2 и 3, мы получим, что прямая и кривая n-го порядка проектируются соответственно поверхностями (5) и (16). Правда, теперь эти уравнения записаны в декартовой косоугольной системе координат. Пересекая поверхности (5) и (16) плоскостью $Z = h$, мы получим уравнения линий (11) и (17), но уже в декартовой прямоугольной системе координат, так как ось Oy перпендикулярна оси Ox.

Следовательно, все выводы предыдущих параграфов сохраняют силу и при проектировании плоскости пучком, наклоненным к предметной плоскости под углом $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ф. А. Коршак**. „Маршрутная щелевая аэрофотосъемка и ее геометрические основы „Труды ВИТУ ВМФ", выпуск 42, Ленинград 1957 г.

2 **Н. С. Моденов**. „Аналитическая геометрия". Изд. МГУ 1955 г.

ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА

1961 УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ Том X

И. В. Ценов

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ

Мы составим интерполяционные формулы для случая, когда интерполирование совершается обобщенными полиномами, т. е. функциями вида

$$y = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) \qquad (1)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ непрерывны и линейно независимы на сегменте $[a,b]$.

Пусть даны точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ и требуется составить уравнение полинома вида (1), который в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимает соответственно значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$

Введем обозначения:

$$A_n = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

$$A_{ni} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_1(x_{i-1}) & \varphi_2(x_{i-1}) & \ldots & \varphi_n(x_{i-1}) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

$$A_{iy} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1)\ \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_{i-1}(x_1)\ y_1 \\ \varphi_1(x_2)\ \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_{i-1}(x_2)\ y_2 \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots \\ \varphi_1(x_i)\ \varphi_2(x_i) & \dots & \varphi_{i-1}(x_i)\ y_i \end{vmatrix}$$

Очевидно, что искомый полином имеет вид:

$$y = \frac{1}{A_n} \sum_{i=1}^{n} A_{ni}\, y_i \qquad (2)$$

Полученная формула (2) представляет собой обобщение интерполяционной формулы Лагранжа на случай обобщенных полиномов вида (1).

Докажем, что формула (2) может быть преобразована к виду:

$$y = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x_1)}\, y_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{A_{iy} A_{ii}}{A_{i-1} A_i} \qquad (3)$$

Займемся некоторыми тождественными преобразованиями, при выводе которых мы будем пользоваться известной формулой теории определителей ([1], стр. 79).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\ u_1\ v_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\ u_n\ v_n \\ x_1 & \dots & x_n\ a\ b \\ y_1 & \dots & y_n\ c\ d \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\ u_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\ u_n \\ x_1 & \dots & x_n\ a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\ v_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\ v_n \\ y_1 & \dots & y_n\ d \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\ u_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\ u_n \\ y_1 & \dots & y_n\ c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\ v_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\ v_n \\ x_1 & \dots & x_n\ b \end{vmatrix}$$

Берем следующее очевидное тождество.

$$z = \frac{1}{A_n} \sum_{i=1}^{n} A_{ni}\, y_i + R_n, \tag{5}$$

где

$$A_{ni} = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{(i-1)1}\ a_{(i-1)2} \dots a_{(i-1)n} \\ x_1\ x_2 \dots x_n \\ a_{(i+1)1}\ a_{(i+1)2} \dots a_{(i+1)n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad R_n = \frac{1}{A_n} \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n}\ y_1 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn}\ y_n \\ x_1 \dots x_n\ z \end{vmatrix}.$$

Допуская, что $A_1, A_2 \dots, A_n$ отличны от нуля, мы докажем, что вместе с (5) существует тождество:

$$z = \frac{x_1\, y_1}{a_{11}} + \sum_{i=2}^{n} \frac{A_{iy}\, A_{ii}}{A_{i-1}\, A_i} + R_n, \tag{6}$$

где $A_{iy} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\,(i-1)}\ y_1 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{i1} \dots a_{i(i-1)}\ y_i \end{vmatrix}$

и при $n = 1$ следует положить, что

$$z = \frac{x_1\, y_1}{a_{11}} + R_1 = \frac{x_1\, y_1}{a_{11}} + \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11}\ y_1 \\ x_1\ z \end{vmatrix}$$

Допуская справедливость тождества (6) при $n = m$, докажем справедливость его при $n = m + 1$. Мы докажем, что правая часть (6) при $n = m + 1$ приводится к z.

Действительно, формула (4) нам дает следующее тождество:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ a_{21} \dots a_{2m} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\,(m+1)}\ y_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{(m+1)1} \dots a_{(m+1)\,(m+1)}\ y_{m+1} \\ x_1 \dots x_{m+1}\ z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} & \\ a_{11} \cdots & a_{1\,(m+1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{(m+1)\,1} \cdots & a_{(m+1)\,(m+1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1m}\ y_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mm}\ y_m \\ x_1 \cdots x_m\ z \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{1m}\ y_1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots & a_{mm}\ y_m \\ a_{(m+1)\,1} \cdots & a_{(m+1)\,m}\ y_{m+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1\,(m+1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots a_{m\,(m+1)} \\ x_1 \cdots x_{m+1} \end{vmatrix}$$

Мы, очевидно, придем к доказательству нашего утверждения, если последнее равенство запишем так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1\,(m+1)}\ y_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{(m+1)\,1} \cdots y_{m+1} \\ x_1 \cdots x_{m+1}\ z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1m}\ y_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mm}\ y_m \\ x_1 \cdots x_m\ z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{1\,(m+1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{(m+1)\,1} \cdots & a_{(m+1)\,(m+1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mm} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{1m}\ y_1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{(m+1)\,1} \cdots & y_{m+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{1\,(m+1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots & a_{m\,(m+1)} \\ x_1 \cdots & x_{m+1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{1m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{1\,(m+1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{(m+1)\,1} \cdots & a_{(m+1)\,(m+1)} \end{vmatrix}$$

Сравнивая (5) и (6), мы заключаем, что

$$\frac{1}{A_n}\sum_{i=1}^{n} A_{ni}\, y_i = \frac{x_1 y_1}{a_{11}} + \sum_{i=2}^{n} \frac{A_{iy} A_{ii}}{A_{i-1} A_i} \qquad (7)$$

Итак, формула (6) есть преобразованная формула (5) и, следовательно, (2) и (3) суть соответственно интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона для обобщенных полиномов.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть значения интерполируемой функции $f(x)$, т. е. $y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$, то из (5) и (6) мы получаем интерполяционные формулы с остаточным членом, который легко преобразовать к виду, содержащему производные $n^{\text{-го}}$ порядка функций $f(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ для некоторого значения $x = \xi$.

Частные случаи полученных здесь результатов содержатся в работе А. К. Минятова ([2], стр. 15—63).

ЛИТЕРАТУРА

1. **G. Kowalewski,** Einführung in die Determinantentheorie, Berlin, 1925, s. 79.
2. **А. К. Минятов.** О построении интерполяционных формул. Математический сборник, 1932. т. 39. № 1—2.

ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА

1961 Ученые записки Том X

Н. Ф. Канунов

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД УСЛОВИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ КВАТЕРНИОННЫХ АЛГЕБР НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Д. К. Фадеев в работе [2] дал решение всех основных вопросов, касающихся строения центральных простых алгебр над полями формальных степенных рядов, полем рациональных функций и полем алгебраических функций. Кватернионные алгебры наиболее важны для приложений.

Представляет известный интерес дать элементарный вывод необходимых и достаточных условий того, чтобы прямое произведение двух кватернионных алгебр над указанным полем было полным кольцом матриц. Ниже мы будем придерживаться терминов, введенных в работе [2]. В частности под названием кватернионов разумеется алгебра обобщенных кватернионов.

Две кватернионные алгебры назовем эквивалентными (подобными в широком смысле, согласно терминологии Д. К. Фаддеева), если одна из них подобна (в обычном смысле) прямому произведению другой на числовую алгебру.

Известно, что если A и B две кватернионные алгебры и $A \times B = C \times P_2$, где P_2 — полное кольцо матриц 2-го порядка, C — кватернионная алгебра, то A и B имеют общее поле разложения.

Обратно, если последнее имеется у кватернионных алгебр A и B, то прямое произведение $A \times B$ является полным кольцом матриц второго порядка над некоторой кватернионной алгеброй C.

Однако можно указать пример двух кватернионных алгебр A и B над полем рациональных функций с рациональными коэффициентами, не имеющих общего поля разложения.

Пусть A имеет канонический базис 1, i_1, j_1, $к_1$ с таблицей: $i_1^2 = -2$, $j_1^2 = -2x$, $к_1^2 = -x$, а алгебра B имеет базис 1, i_2, j_2, $к_2$ с таблицей: $i_2^2 = -1$, $j_2^2 = x$, $к_2^2 = x$.

Если эти алгебры имеют общее подполе разложения, то

$$2x_1^2 + 2xУ_1^2 + xZ_1^2 = X_2^2 - xУ_2^2 - xZ_2^2 \ldots \qquad (1)$$

где $X_i = X_i(x)$, $У_i = У_i(x)$, $Z_i = Z_i(x)$; $i = 1,2$ полиномы от x,

которые без уменьшения общности рассуждения можно считать взаимно-простыми в совокупности.

Обозначим соответственно через $X_i(0)$, $У_i(0)$, $Z_i(0)$; $i = 1,2$ свободные члены этих полиномов. Тогда при $x = 0$ из равенства (1) получаем:

$$2X_1(0)^2 = X_2(0)^2$$

откуда: $X_1 = xX_1$, $X_2 = xX_2$, где X_1, X_2 полиномы от x.

Вставив эти значения в равенство (1), сократив на x и, затем, положив $x = 0$, находим

$$2У_1(0)^2 + Z_1(0)^2 + У_2(0)^2 + Z_2(0)^2 = 0$$

или

$$У_1(0) = Z_1(0) = У_2(0) = Z_2(0)$$

Значит все полиномы $X_i(x)$, $У_i(x)$, $Z_i(x)$; $i = 1,2$ имеют общего множителя x. Противоречие!

Поэтому рассмотрим кватернионные алгебры над полем K(x,y) алгебраических функции от двух переменных, причем поле констант K будем полагать алгебраически замкнутым.

Tsen в работе [1] доказал, что простые центральные алгебры над полем рациональных функций одного переменного или полем алгебраических функций с алгебраически-замкнутым полем констант являются полными кольцами матриц над своими центрами.

В самом деле, все инварианты такой алгебры A равны 1 и, следовательно, она является числовой на основании теоремы 7 работы [3]. А так как в K всегда разрешимо уравнение $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, где a, b, c константы производящей тройки базиса алгебры A, то A также и полное кольцо матриц.

Согласно известной теореме Ван-дер-Вардена, если число форм F_i с коэффициентами из алгебраически-замкнутого поля

меньше, чем число неизвестных, то всегда существует отличное от нуля общее решение системы $F_i = 0$.

Опираясь на эту теорему докажем следующую лемму. Если К алгебраически-замкнутое поле, а $A_1 = A_1(x_1, x_2, .., x_n)$ $A_2 = A_2(x_1, x_2, .., x_n)$, ... , $A_t = A_t(x_1, .., x_n)$ полиномы с коэффициентами из К, то при $t \geqslant 2^n + 1$ уравнение

$$A_1 X_1^2 + \ldots + A_t X_t^2 = 0 \ldots \qquad (2)$$

имеет нетривиальное решение: $X_1 = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $X_2 = X_2(x_1, x_2, .., x_n) \ldots$, $X_t = X_t(x_1, x_2, .., x_n)$ в полиномах от $x_1, x_2, \ldots, x_t$.

Доказательство. Пусть наивысшая степень полинома из полиномов $A_1, A_2, \ldots, A_t = m$. Будем искать решение уравнения (2) в виде

$$\sum_{\lambda_1 + .. + \lambda_n \leqslant M} a_{\lambda_1 .. \lambda_2 \ldots \lambda_n} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda n}$$

полинома степени M с неопределенными коэффициентами

$$a_{\lambda_1} \ldots \lambda_n \ (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \leqslant M).$$

Такой полином имеет C^n_{n+m} членов и, таким образом, число коэффициентов, подлежащих определению, равно $t\ C^n_{n+m}$.

Число соотношений между такими коэффициентами равно числу коэффициентов уравнения (2), наивысшая степень которого равна $m + 2M$.

Так как каждое слагаемое $A_i\ X_i^2$ есть полином степени $\leqslant m + 2M$, то в нашем распоряжении будет C^n_{n+m+2M} соотношений, каждое из которых является однородным уравнением второй степени относительно искомых коэффициентов.

Согласно указаннной теореме Ван-дер-Вардена получается, что система таких однородных уравнений будет иметь нетривиальное решение, как только число неизвестных будет больше числа уравнений, т. е., когда

$$tC^n_{n+m} > C^n_{n+m+2M}$$

Это неравенство при достаточно большом M будет всегда выполняться, если $t \geqslant 2^n + 1$. Отсюда следует, что при $n = 2$, всякая квадратичная форма с пятью переменным принимает 0 нетривиальным образом.

Теперь нетрудно доказать, что любые две кватернионные алгебры над полем К (x, y) рациональных функций с алгебраически-замкнутым полем констант К имеют общее квадратичное подполе разложения.

В самом деле пусть

$$i_1^2 = -в_1(x, y)\,c_1(x, y),\ j_1^2 = -a_1(x, y)\,c_1(x, y),\ к_1^2 =$$

$$= -a_1(x, y)\,в_1(x, y)$$

и

$$i_2^2 = -в_2(x, y)\,c_2(x, y),\ j_2^2 = -a_2(x, y)\,c_2(x, y),\ к_2^2 =$$

$$= -a_2(x, y)\,в_2(x, y)$$

таблицы базисов соответственно алгебр А и В.

Положим $\alpha = x_1 i_1 + y_1 j_1 + z_1 к$ и $\beta = x_2 i_2 + y_2 j_2 + z_2 к_2$, где α — элемент из А, β — элемент из В. Тогда на основании отмеченного следствия из леммы, уравнение $\alpha^2 = \beta^2$ имеет нетривиальное решение.

Поэтому квадратичные подполя К (α) и К (β) соответственно алгебр А и В, изоморфны.

Tsen в статье [1] привел также пример нормальной алгебры с делением ранга 4 над полем рациональных функций от двух переменнных. Однако в рассматриваемом нами случае кватернионных алгебр над полем рациональных функций с алгебраически замкнутым полем констант проблема изоморфизма решается до конца.

Прежде всего, введя понятие критических точек и определив инварианты таких алгебр, как это сделано в работе [3], взяв рассматриваемые алгебры в виде скрещенных произведений, мы легко устанавливаем, что

$$A \times B = C \times P_2$$

где С — кватернионная над К (x) алгебр, P_2 — полное кольцо матриц 2-го порядка и кроме того, что: а) критические точки С содержатся в объединении критических точек А и В, б) инварианты алгебры С равны произведению инвариантов алгебр А и В.

После этого, имея в виду вышеприведенное доказательство о наличии общих квадратичных подполей К (α) и К (β) у алгебр А и В над указанным полем К (x, y) получаем, что прямое произведение $A \times B$ двух кватернионных алгебр над

полем рациональных функций $K(x, y)$ с алгебраически-замкнутым полем констант K тогда и только тогда является полным кольцом матриц, когда A и B имеют общие критические точки в которых инварианты A и B совпадают.

В самом деле, по вышесказанному $A \times B = C \times P_2$, где C — кватернионная над $K(x)$ алгебра.

Но по приведенной выше теореме C сама является полным кольцом матриц. Таким образом необходимое и достаточное условие эквивалентности A и B получено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tsen C. Algebren über Funktioenkörper. Диссертация, Геттинген, 1934.
2. **Д. К. Фаддеев**. Простые алгебры над полем алгебраических функций от одной переменной. Труды Математического института им. В. А. Стеклова Том XXXVIII. 1951.
3. **Н. Ф. Канунов**. Числовая алгебра обобщенных кватернионов над полем рациональных функций. „Ученые записки Алма-Атинского госпединститута им. Абая“ № 12, 1959.

ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА

1961 УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ Том X

Б. П. Пашаев

ТЕПЛОВОЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СБОЙСТВА НЕКОТОРЫХ БРОНЗ

Бронзы — это технические сплавы, в состав которых входят медь, олово и добавки некоторых других металлов. Они обладают более высокими механическими свойствами, химической стойкостью и лучшими литейными свойствами, чем латуни (медно-цинковые сплавы). Оловянистые бронзы постепенно заменяются другими сплавами, в состав которых входят менее дефицитные металлы вместо олова. Но требования, предъявлемые к этим заменителям, такие же или еще более высокие, чем к оловянистым бронзам. Поэтому для лучшего подбора заменителей необходимо обстоятельное изучение физических свойств как старых, так и предлагаемых новых бронз. С этой целью проведены измерения теплопроводности, электропроводности, линейного расширения и термоэдс в паре с медной проволокой, издавна применяемой бронзы *ОФ — 10 — 1* и ее новых заменителей: *С* 30 + 2% *Ni* и *СУНЦ-7-2*. Из кусков бронзы вытачивались на станке образцы диаметром 3 *мм* и длинной 65 *мм*. Образцы обжигались в течение 6 — 7 часов в атмосфере углерода при температуре 700° С.

Термопары для измерения температуры были приварены к образцу точечной сваркой. Измерение температуры и термоэлектродвижущих сил проводились потенциометром ППТН-1, а разности потенциалов для вычисления электропроводности при помощи потенциометра ППТВ-1 с делителем напряжения.

Для проведения измерений использован метод электрического нагрева Кольрауша [1]. Измерение теплопроводности и электропроводности для сплавов ОФ-10-1 и С30 + 2% *Ni* проведено как в закаленном, так и в отожженном состоянии.

Результаты измерений теплопроводности и электропроводности бронзы ОФ-10-1 графически представлены на рис. 1.

Как видно из рис. 1, электропроводность (3) и теплопроводность (1) в отожженном состоянии больше, чем в закаленном состоянии на 5—6% (линии 4 и 2). С повышением температуры теплопроводность увеличивается, а электропровод-

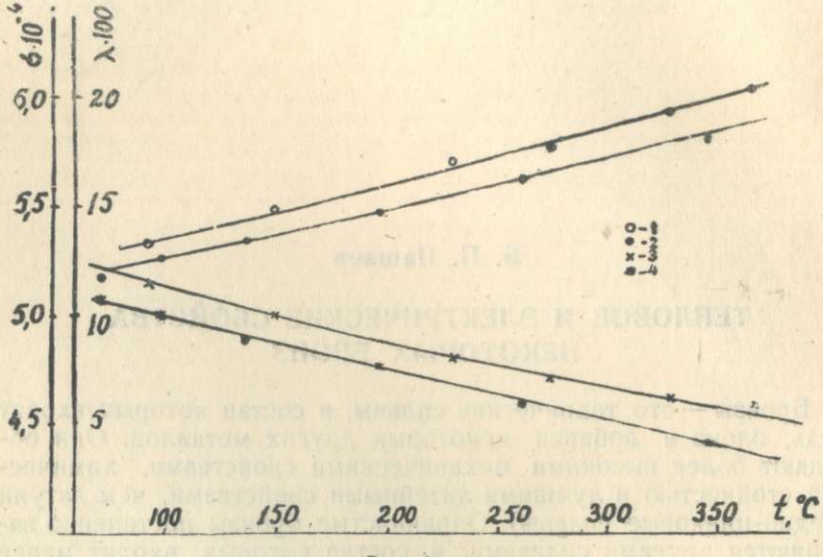


Рис. 1.

ность уменьшается. Значение коэффициента теплопроводности для этого сплава (в отожженном состоянии у нас) на 20% больше по сравнению с данными в [3] при 50° (неизвестно в каком состоянии берется там). При более высоких температурах, например, при 350° С, различие доходит до 25%. Эти расхождения, по-видимому, обусловлены как различием ошибок в применяемых методах и установках для измерения, так и в большей степени, различием самих образцов, полученных при различных технологических условиях.

Например, образец бронзы ОФ-10-1, отлитый в песочную форму, согласно [2] имеет теплопроводность

$$0{,}117 \frac{\text{кал.}}{\text{см. сек. град.}},$$

а отлитый в кокиль —

$$0{,}082 \frac{\text{кал}}{\text{см. сек. град.}},$$

т. е. эти образцы отличаются друг от друга по теплопроводности более чем на 25%.

На рис. 2 представлены результаты измерения теплопроводности (линии 3 и 4) и электропроводности (линии 1 и 2) бронзы С30 + 2% Ni в отожженном и закаленном состоянии. Эта бронза обладает довольно большой теплопроводностью, которая с повышением температуры также возврастает. Ее теплопроводностъ более чем в два раза превосходит теплопроводность ОФ-10-1. Ввиду высоких механических свойств и большой теплопроводности, этот сплав оправдывает свое применение взамен оловянистой бронзы для поясков поршней паровых машин, где требуется сочетание устойчивости против

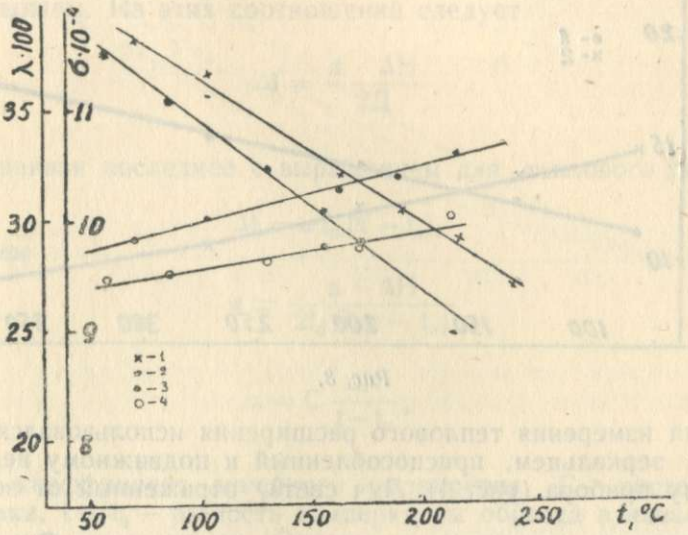


Рис. 2.

истирания и большой способности отвода тепла при высоких температурах. В случае этого сплава также теплопроводность и электропроводность в отожженном состоянии больше, по сравнению с закаленным, примерно на 6%.

Температурная зависимость теплопроводности (1) и электропроводности (2) в отожженном состоянии для сплава СуНЦ — 7 — 2 представлена рис. 3. Здесь так же, как в случае предыдущих бронз, теплопроводность с повышением температуры возрастает, а электропроводность падает.

Соотношение Видемана-Франца для всех трех испытанных бронз больше теоретической величины и с повышением температуры незначительно уменьшается. Произведение электропроводности на соответствующие значения абсолютной температуры (σT) увеличивается с температурой. Поэтому и теплопроводность с температурой увеличивается, несмотря на

уменьшение электропроводности, согласно уравнению $\lambda = \sigma T 0{,}24$, получаемого из закона Видемана-Франца.

Как было отмечено выше, наша установка для измерения теплопроводности и электропроводности приспособлена также для одновременного измерения теплового расширения и термоэлектродвижущей силы. Поэтому попутно были проведены измерения этих свойств на образцах бронз.

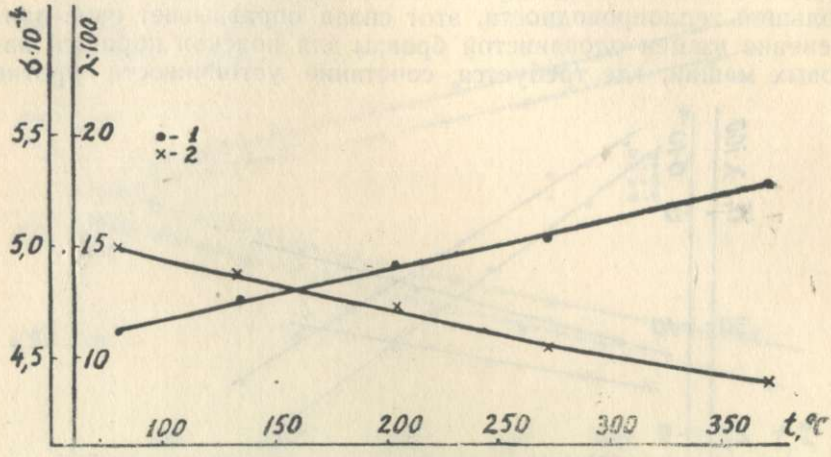


Рис. 3.

Для измерения теплового расширения использовался рычажок с зеркальцем, приспособленный к подвижному верхнему зажиму прибора (рис. 4). Луч света, отраженный от зеркальца, падает на шкалу, отстоящую от прибора на расстоянии 175 *см*. Перемещение светового луча по шкале регистрирует тепловое расширение образца по мере нагревания. Можно не только наблюдать и регистрировать тепловое расширение, но

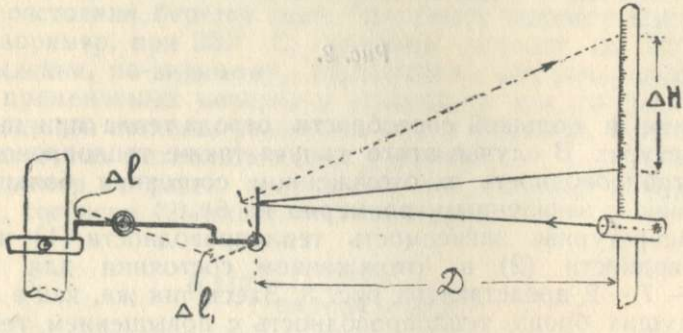


Рис. 4.

и провести измерения коэффициента теплового расширения относительно какого-либо эталонного образца.

Из рис. 4 видно, что

$$\frac{\Delta l}{a} = \frac{\Delta l_1}{в} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta l_1}{в} = \frac{\Delta H}{2Д},$$

Где Δl — изменение длины образца, Δl_1 — отклонение другого конца рычага, а и в — плечи рычажка, ΔH — отклонение отраженного луча по шкале, Д — расстояние от зеркальца прибора до шкалы. Из этих соотношений следует

$$\Delta l = \frac{a \cdot \Delta H}{2Д}.$$

Сравнивая последнее с выражением для теплового расширения

$$\Delta l = \alpha l_0 (t - t_0),$$

получаем

$$\alpha = \frac{a \cdot \Delta H}{2 l_0 Д (t - t_0)}$$

$$\alpha = C \frac{\Delta H}{t - t_0},$$

где α — коэффициент линейного расширения, С — постоянная установки, $t - t_0$ — разность температуры образца в начальный момент и в конце опыта. Определяя величину постоянной С из опыта с известным образцом, можно провести измерения коэффициента теплового расширения неизвестных образцов при различных температурах. Ошибки в измерении коэффициента теплового расширения составляли около 3%.

Результаты измерения теплового расширения бронз ОФ-10-1 (кривая 3), С30 + 2% Ni (кривая 1) и СуНЦ — 7 — 2 — 1 (кривая 4), отожженных при 700° С, представлены на рис. 5. Для бронзы С30 + 2% Ni приведены данные для закаленного состояния (кривая 2). Как видно из рис. 5, коэффициенты линейного расширения у образца С30 + 2% Ni больше, чем у образцов ОФ—10—1 и СуНЦ—7—2—1. Коэффициент линейного расширения для сплава ОФ—10—1, вычисленный из наших измерений, имеет значение $19 \div 20\ 10^{-6}$ град$^{-1}$ при 60°С; согласно табличным данным [3] он составляет $17 \div 18 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$ (при комнатной температуре). С повышением температуры коэффициент теплового расширения у всех образцов увеличивается.

Термический коэффициент линейного расширения и тепловое сопротивление металлов и сплавов зависит от характера колебаний атомов в решетке. Наличием ангармонических колебаний решетки объясняется тепловое расширение и тепловое сопротивление. Как указал Я. И. Френкель [4], тепловое

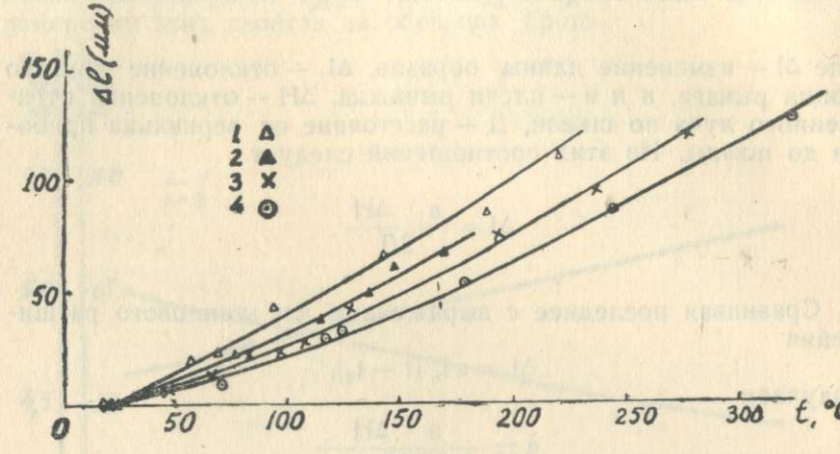


Рис. 5.

сопротивление изолирующих кристаллов прямо пропорционально термическому коэффициенту линейного расширения и выражается формулой $\frac{1}{\lambda} \approx c^1\alpha$, где $\frac{1}{\lambda}$ — тепловое сопротивление, c^1 — угловой коэффициент.

Это соотношение хорошо оправдывается для фононной теплопроводности [5]. Рассмотренные нами выше сплавы — бронзы являются электронными проводниками; большая часть теплопроводности в них обусловлена не фононами, а электронами. Вопрос о связи между электронной частью теплопроводности сплавов и тепловым расширением еще достаточно не разработан.

Термоэлектродвижущие силы определялись между испытуемыми образцами бронз и медными проводами термопар, прикрепленными к образцу. Измерение термоэдс проводились при выключенном токе через образец. Нужная температура образца и градиенты температур на нем создавались при помощи бокового секционного нагревателя. Определялись термоэдс для обеих половин рабочего участка образца и выводились среднеарифметические значения:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} + \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2}\right),$$

где Δv_1 и Δv_2 — разности потенциалов между центром и концами образца, Δt_1 и Δt_2 разности температур на тех же участках. Градиенты температур при измерении термоэдс поддерживались в пределах от 10 до 22°С.

Результаты измерения термоэлектродвижущей силы отожженных сплавов в паре с медной проволочкой представлены на рис. 6. Как видно из рис. 6, термоэлектродвижущая сила образцов С30 + 2% Ni (кривая 3) и ОФ—10—1 (кривая 2) значительно меньше, чем термоэдс образца СуНЦ—7—2—1 в паре с медью (кривая 1). Для всех образцов наблюдалось увеличение термоэдс с повышением температуры.

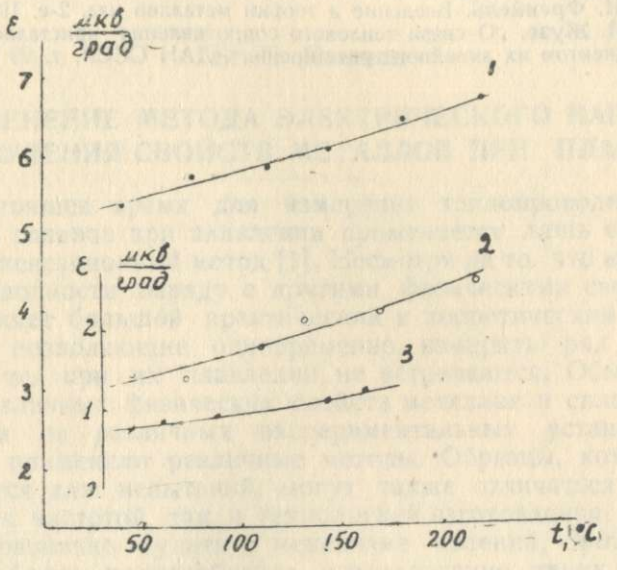


Рис. 6.

Таким образом на установке для измерения теплопроводности и электропроводности методом Кольрауша можно без всякого ущерба для основной задачи провести также измерение теплового расширения и термоэлектродвижущих сил металлов и сплавов.

Измеренные выше параметры твердого тела (электропроводность, теплопроводность термоэдс и коэффициент теплового расширения), как известно, зависят от характера взаимодействия между атомами решетки. Проводимость и термоэдс кроме того, зависят от взаимодействия электронов между собой и с кристаллической решеткой.

Поэтому одновременное изучение таких свойств в зависимости от температуры дополняет друг друга и представляет

интерес как для выяснения влияния температуры на структуру тела, так и для уточнения теории рассматриваемых явлений их взаимосвязи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Б. Пашаев.** Теплопроводность и электропроводность сплавов системы кадмий-олово „Ученые записки Дагестанского университета", т. I, 1957 и т. УП, 1961.
2. **А. П. Смирягин.** Промышленные цветные металлы и сплавы, Металлургиздат, М., 1949.
3. Техническая энциклопедия. Справочник физических, хим. и технологических величин, т. УП, 1931.
4. **Я. И. Френкель.** Введение в теории металлов изд. 2-е. 1950.
5. **В. П. Жузе.** „О связи теплового сопротивления кристаллов с коэффициентом их линейного расширения". ДАН СССР, т. 99 № 5.

ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. В. И. ЛЕНИНА

1961 УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ Том X

Б. П. Пашаев

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО НАГРЕВА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ СВОЙСТВ МЕТАЛЛОВ ПРИ ПЛАВЛЕНИИ

В настоящее время для измерения теплопроводности металлов и сплавов при плавлении применяется лишь один плоский компенсационный метод [1]. Несмотря на то, что измерение теплопроводности, наряду с другими физическими свойствами, представляет большой практический и теоретический интерес, методы, позволяющие одновременно измерять ряд свойств твердых тел при их плавлении, не встречаются. Обычно изучение различных физических свойств металлов и сплавов производится на различных экспериментальных установках, в которых применяют различные методы. Образцы, которые используются для испытаний, могут также отличаться друг от друга как чистотой, так и технологией изготовления. Поэтому, чтобы правильно судить о механизме явлений, протекающих в телах, более целесообразно использование таких методов, которые позволяют провести измерения нескольких физических свойств на одном и том же образце и в одинаковых условиях.

Одним из методов, позволяющих провести одновременно измерение нескольких свойств металлов и сплавов, является метод электрического нагрева (метод Кольрауша) [2].

В настоящее время различные варианты этого метода [3, 4, 5] нашли применение в измерении теплопроводности и электропроводности металлов и сплавов только в твердом состоянии.

Для изучения свойств металлов не только в твердом состоянии, но и при плавлении, нами осуществлено некоторое изменение в устройстве прибора.

Конструкция прибора приведена на рис. 1 Образец 4, зажатый своими концами между зажимами 3 прибора, находится в фарфоровой трубке 10. Спаи термопар для измерения

температуры образца пропущены через узкие отверстия в трубке. Такое устройство осуществляется следующим образом.

В средней части фарфоровой трубочки (∅ 3 *мм*, длина 4 *мм*) вдоль оси просверлено три отверстия (∅ 0,2 *мм*) — на расстоянии в 10 *мм* друг от друга. Через эти отверстия введены внутрь трубки спаи трех термопар 9. Трубочку вместе с укрепленными к ней термопарами помещают в специальную форму, изготовленную из теста огнеупорной глины с шамотом и производят отливку образца. Контакты термопар с образцом при таком способе получаются более надежными, чем в обычных способах сварки или механического крепления в отверстиях. Затем образец, заключенный в фарфоровой трубочке 10 (контакты образца выступают из трубки), вместе с термопарами укрепляют между зажимами 3 прибора, которые обтекаются водопроводной водой. Вокруг трубки с образцом находится трехсекционная охранная пачка 7, замурованная в керамические полуцилиндры, которая позволяет подобрать в окружающей образец среде распределение температуры, сходное с распределением температуры на самом образце при пропускании через него электрического тока. Охранная печка находится внутри двухстенного стального цилиндра 5 (состоящего из двух половин), через который также протекает водопроводная вода. На рис. 1 обозначено: 1 — подводка тока, 6 — камера для воды, 8 — экран.

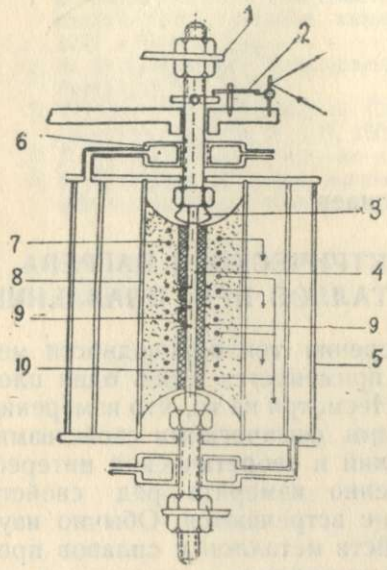


Рис. 1.

Для устранения возникновения напряжений в образце при повышении температуры верхний зажим прибора сделан подвижным. К этому зажиму пристроено простое рычажное приспособление 2 с зеркальцем, которое позволяет регистрировать или измерять тепловое расширение образцов металлов или сплавов.

Такая конструкция прибора позволяет произвести на нем изучение свойств металлов до температуры, значительно превышающей температуру плавления. При переходе значительной части образца в жидкое состояние как положение самого образца, так и качество контактов образца со спаями тер-

мопар сохраняются без изменения. Градиент температуры на образце в жидком состоянии раза в два больше по сравнению с градиентом температуры в твердом состоянии. Поэтому при поддержании у зажимов прибора комнатной температуры, температуру рабочей части образца легко довести на несколько десятков или сотен градусов выше температуры плавления образца.

На рис. 2 приведены результаты измерения удельного сопротивления (крестики) и теплопроводности (кривая с нулями) олова (99,04%) в зависимости от температуры. Точность измерения в случае жидкого состояния не ниже, чем для твердого состояния: для теплопроводности около 4%, для удельного

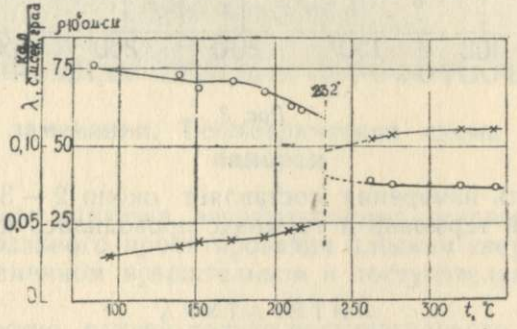


Рис. 2.

сопротивления 1,2%. Отношение электропроводности в твердом состоянии к электропроводности в жидком состоянии по нашим измерениям этим методом составляет 2, а отношение для теплопроводностей 1,6, т. е. отношение для электропроводностей очень хорошо сходится с известными данными других авторов. Это и понятно, так как электропроводность можно измерить легко и с большой точностью. Отношение для теплопроводности, полученное этим методом, на 10 — 15% меньше, чем полученное в других методах.

На рассматриваемом приборе нами измерена также термоэлектродвижущая сила олова в контакте с медными проводами медь-константановых термопар, прикрепленных к образцу. Измерение термоэдс производилось при выключенном токе через образец. Нагрев образца и создание на рабочей части образца нужного градиента температуры осуществлялось при помощи секционного охранного нагревателя. Определение термоэдс для обеих половин рабочего участка (между центром и крайними точками) образца и выводились их среднеарифметические значения. Результаты измерения термоэдс приведены

на рис. 3. Как видно из рис. 3 в точке плавления величина термоэлектродвижущей силы подвергается резкому скачку, что наблюдается и для других металлов. Градиент температур при измерении электродвижущей силы составлял не более

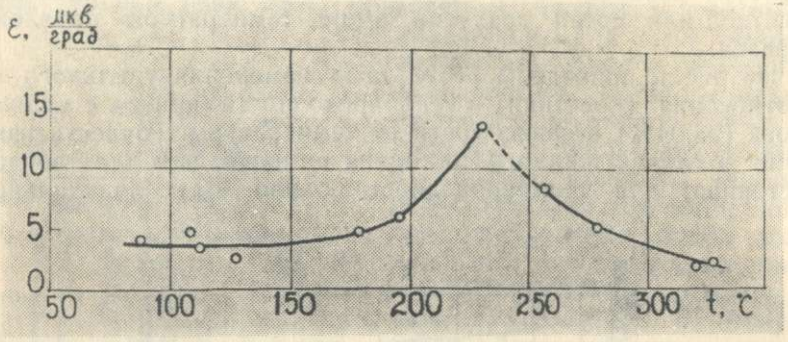


Рис. 3.

10°С. Точность измерения составляет около 2—3%. Измерение показаний термопар и термоэдс проводились потенциометром ППТН-1.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Х. И. Амирханов**. Теплопроводность полупроводников. ЖЭТФ, 6, 1944, Изв. АН Азерб. ССР, № 4, 1946.

2. **В. Е. Мирюков**. Теплопроводность и электропроводность металлов и сплавов. ГНТИ, М. 1959.

3. **Б. П. Пашаев**. Теплопроводность и электропроводность сплавов системы кадмий — олово. „Ученые записки" Даггосуниверситета, том VII, 1961 г.

4. **Б. Е. Неймарк**. „Теплоэнергетика" № 1, 1958.

5. **Р. Е. Кржижановский** „Заводская лаборатория", № 8, 1957.

ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА

1961 УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ Том X

Ф. А. Коршак

ПАНОРАМНАЯ ЩЕЛЕВАЯ АЭРОФОТОСЪЕМКА

1. Вводные замечания. Геометрическая схема образования панорам

Панорамная щелевая аэрофотосъемка основана на применении центрального проектирования плоским световым пучком при одновременном вращательном и поступательном движении последнего.

Как известно, случай только поступательного перемещения пучка имеет место при маршрутной щелевой аэрофотосъемке [1, 2], а вращающийся вокруг неподвижной оси пучок используется при наземной съемке [3].

Создателем панорамной щелевой аэрофотосъемки является В. С. Семенов, талантливый инженер-изобретатель, сконструировавший необходимую аппаратуру и применивший её для практических целей. В. С. Семенов погиб в 1950 году при аварии самолета, на котором он испытывал один из своих щелевых аппаратов. В теоретических работах В. С. Семенова нет достаточно подробных исследований, касающихся геометрической структуры щелевых фотоснимков. Анализ же изображений, получаемых в результате центрального проектирования плоским световым пучком, представляет большой интерес как для целесообразного практического использования щелевых фотографий, так и с научной точки зрения, поскольку здесь имеет место новая теория проектирования, еще ненашедшая отражения ни в начертательной, ни в проективной геометрии.

Настоящая статья посвящена исследованию геометрических свойств панорам, получаемых при щелевой аэрофотосъемке.

Панорамную щелевую аэрофотосъемку можно произвести при помощи аппарата, построенного на принципе использова-

ния плоского светового пучка, вращающегося вокруг вертикальной оси MN (рис. 1), которая в свою очередь совершает прямолинейное поступательное движение в пространстве вместе с самолетом по линии SS_1. Ход дальнейших рассуждений и выводов не изменится, если считать, что щелевой фотоаппарат установлен на ракете, автомобиле, поезде, судне и т. п.

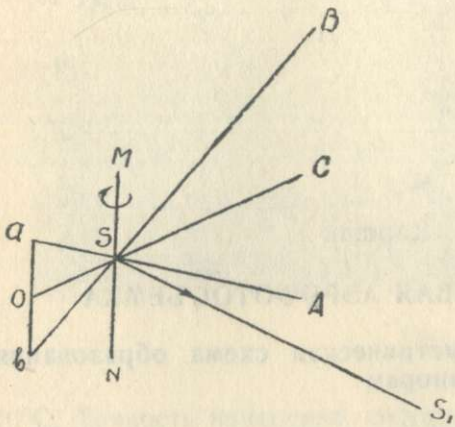


Рис. 1.

Световой проектирующий пучок, представленный на рис. 1, состоит из картинной aSb и предметной ASB частей и образуется совокупностью лучей, проходящих через вершину S, называемую иначе центром проекции, или центром пучка, и через прямую ab, называемую картинным основанием пучка. Центр пучка находится в центре объектива аэрофотоаппарата, а картинным основанием является щель, перед которой перемещается светочувствительная пленка.

Луч Co, перпендикулярный картинному основанию, считается главным лучом (оптическая ось аэрофотоаппарата), отрезок So называется картинным расстоянием, точка o в которой главный луч пересекает картинное основание, является главной точкой пучка.

В общем случае ось вращения MN может быть наклонена и произвольно ориентирована относительно плоскости пучка, его вершины и основания. Это приведет к усложнению съемочной аппаратуры и геометрической структуры панорам, поэтому на практике картинное основание и ось вращения пучка обычно располагают вертикально, а вершину пучка S совмещают при этом с осью вращения MN. При съемке на вираже центр пучка будет перемещаться по окружности, ось вращения окажется наклонённой и опишет коническую поверхность. Картинное основание пучка, будучи параллельным оси вращения, во всех случаях описывает цилиндрическую поверхность, а сам пучок и каждый его луч совершают одновременно поступательное и вращательное движения.

Таким образом, при панорамной аэрофотосъемке проектирование предметного пространства происходит на цилиндрическую поверхность, которая совершает поступательное движение вместе с самолетом. Для практического использования картинная цилиндрическая поверхность развертывается в плоскость.

На рис. 2 показана в плане прямолинейная горизонтальная траектория с обозначением на ней нескольких последовательных положений вершины пучка S_1, $S_2 \cdots S_9$ и направлений главного луча $S_1 - 1$, $S_2 - 2$, $\cdots$ $S_9 - 9$ для отдельных моментов времени в пределах цикла, охватывающего панораму в 360°. Разумеется, началом цикла можно считать любое положение главного луча. Точно также следующий цикл либо непосредственно примыкает к предыдущему, либо начинается некоторое время спустя после окончания предыдущего.

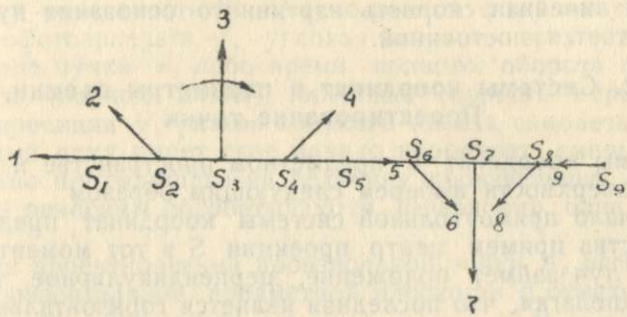


Рис. 2.

Каждый цикл может заключать круговую панораму в 360°, как на рис. 2 от $S_1 - 1$ до $S_9 - 9$, или только часть её, например, 180° (от $S_1 - 1$ до $S_5 - 5$ или от $S_5 - 5$ до $S_9 - 9$) или 90° (от $S_2 - 2$ до $S_4 - 4$ или от $S_6 - 6$ до $S_8 - 8$). Следующий круговой цикл охватывает ту же часть предметного пространства, что и предыдущий, но уже с других точек траектории. Съемка одной и той же площади с разных точек траектории дает возможность использовать смежные циклы для

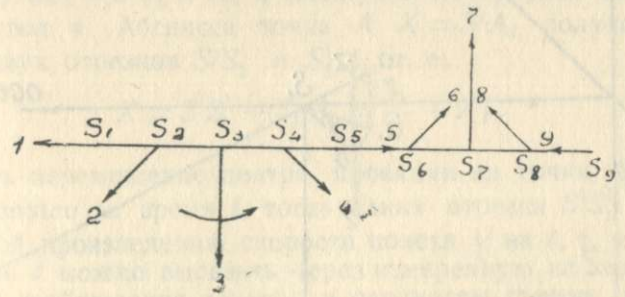


Рис. 3.

определения координат точек предметного пространства, расположенных в зонах перекрытий.

Вращение пучка может совершаться в любую сторону. На рис. 2 показаны положения главного луча при вращении пучка по ходу часовой стрелки, на рис. 3 вращение пучка происходит против хода часовой стрелки. На обоих рисунках направление полета считается слева направо. В первом случае сперва снимается левая часть местности, а потом правая, во втором случае — наоборот.

Механизм современных щелевых камер допускает вращение пучка только с постоянной угловой скоростью, следовательно, и линейная скорость картинного основания пучка все время остается постоянной.

2. Системы координат и параметры съемки. Проектирование точки

Системы координат в предметном пространстве и на картинной поверхности выберем следующим образом.

За начало прямоугольной системы координат предметного пространства примем центр проекции S в тот момент, когда главный луч займет положение, перпендикулярное траектории, предполагая, что последняя является горизонтальной прямой и определяет направление оси X. Горизонтальное положение главного луча в этот момент будем считать осью $У$, а вертикальную прямую, проходящую через начало координат — осью Z. Положительные направления осей обозначены на рис. 4 стрелками.

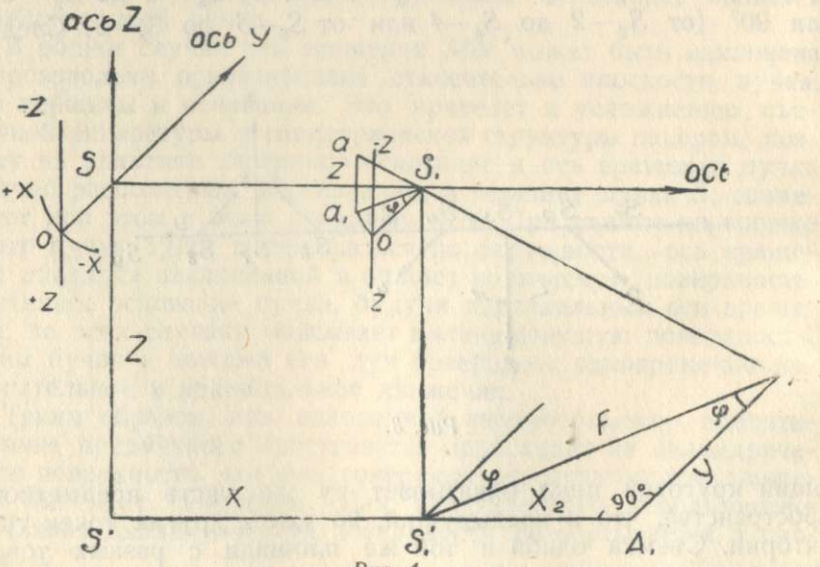


Рис. 4.

На картинной цилиндрической поверхности в качестве оси x возьмем линию, описываемую главной точкой o проектирующего пучка (окружность). При развертывании картинной поверхности в плоскость эта линия преобразуется в горизонтальную прямую. За начало координат примем точку o, в которой главный луч пересекает ось x при положении его, перпендикулярном траектории центра проекции, т. е когда он определяет направление оси Y предметного пространства. Осью Z будет вертикальная прямая, проходящая через начало координат.

Параметрами съемки являются: радиус картинной цилиндрической поверхности So, обычно равный фокусному расстоянию аэрофотоаппарата f, угловая скорость вращения проектирующего пучка ω либо время полного оборота его T вокруг оси (период цикла), линейная скорость перемещения центра проекции V, равная скорости полета самолета.

Каждый цикл имеет свое начало координат, смещенное относительно предыдущего на величину произведения VT, если смежные панорамы обрабатываются независимо одна от другой.

Схема проектирования произвольной точки A, расположенной в горизонтальной предметной плоскости с отметкой (аппликатой) $Z = SS^1 = S_1S_1^1$, показана на рис. 4. Установим связь между пространственными координатами X, Y и Z этой точки, координатами x и z её изображения a на картине и параметрами съемки f, V и T.

Как видно на рис. 4, точки A попала в плоскость проектирующего пучка в тот момент, когда центр последнего занял положение S_1, переместившись от начала координат на величину $SS_1 = S^1S_1^1 = X$, а сам пучок повернулся за это время на угол φ. Абсцисса точка A $X = S^1A_1$ получается как сумма двух отрезков $S^1S_1^1$ и $S_1^1A_1$, т. е.

$$X = S^1S_1^1 + S_1^1A_1 = X_1 + X_2. \qquad (1)$$

Пусть перемещение центра проекции из точки S в точку S_1 произошло за время t, тогда длина отрезка $S^1S_1^1$ получится равной произведению скорости полета V на t, т. е. $X_1 = Vt$.

Время t можно выразить через измеренную на снимке абсциссу x изображения точки a и параметры съемки, исходя из следующих рассуждений.

Полный оборот главная точка пучка совершает за время T и описывает при этом окружность, длина которой равна $2\pi f$. За время t главная точка описывает дугу $x = oa_1$ того же радиуса. Значит можно написать пропорцию

$$t : T = x : 2\pi f,$$

откуда

$$t = \frac{T}{2\pi f} x .$$

Следовательно,

$$X_1 = V\frac{T}{2\pi f} x. \qquad (2)$$

Длину отрезка $S_1^1 A_1 = X_2$, являющегося катетом прямоугольного треугольника $AA_1S_1^1$, можно вычислить по формуле $X_2 = F \sin \varphi$.

В этой формуле нужно выразить F и φ через заданные f, Z и измеренные x, z величины.

Из подобия прямоугольных треугольников $S_1S_1^1A$ и aa_1S_1 можно написать пропорцию $F : Z = f : z$, из которой

$$F = \frac{f}{z} Z , \qquad (3)$$

тогда

$$X_2 = \frac{f}{z} Z \sin \varphi. \qquad (4)$$

Угол φ измеряется дугою x, а так как $\varphi : 360° = x : 2\pi f$, то $\varphi = \dfrac{360°}{2\pi f} x$.

Подставляя в формулу (1) выражения (2) и (4), получим абсциссу точка A

$$X = \frac{VT}{2\pi f} x + \frac{f}{z} Z \sin \varphi. \qquad (5)$$

Ординату точки A, являющуюся катетом AA_1 прямоугольного треугольника $AA_1S_1^1$, можно вычислить по формуле $У = F \cos \varphi$.

Подставляя вместо F его значение из (3), получим окончательно

$$У = \frac{f}{z} Z \cos \varphi. \qquad (6)$$

Аппликату Z, если она не задана, можно определить только в том случае, когда точка A сфотографировалась на двух соседних панорамах. Такой случай будет рассмотрен в § 6.

В выражениях (5) и (6) можно сделать следующие обозначения: $\dfrac{VT}{2\pi}$ обозначить буквой R, $\dfrac{x}{f}$ — это угол φ в радианах, $\dfrac{f}{z} Z = \text{F}$. Тогда

$$X = R\varphi + F \sin \varphi, \quad У = F \cos \varphi$$

представляют собой параметрические уравнения циклоиды, у которой R — радиус основной окружности, F — радиус производящей окружности, ось X совмещена с линией центров, а ось Y является осью симметрии кривой. Отсюда можно сделать вывод, что каждый луч проектирующего пучка имеет в качестве направляющей циклоиду, элементы которой определяются параметрами съёмки и углом наклона луча к горизонту.

3. Проектирование горизонтальных прямых, параллельных оси X

Любая линия предметного пространства, в том числе и прямая, проектируется совокупностью световых лучей, образующих поверхность, которая в пересечении с цилиндрической картинной поверхностью дает изображение данной линии. Каждый проектирующий луч при этом проходит через данную линию, траекторию центра проекции и картинное основание пучка.

Для горизонтальных линий предметного пространства форма проектирующей поверхности зависит от ориентирования этих линий относительно траектории центра проекции.

Если бы ось вращения проектирующего пучка была неподвижна, то любая прямая предметного пространства проектировалась бы лучами, проходящими через центр проекции и через эту прямую. В результате образуется проектирующая плоскость, пересекающая цилиндрическую картинную поверхность по дуге эллипса. При развертывании цилиндрической поверхности дуга эллипса преобразуется в кривую синусоидального вида. Такой случай имеет место при наземной щелевой фотограмметрической съемке [3]. Факт поступательного перемещения оси вращения пучка вызывает деформацию этих кривых, сущность которой выясним сперва для горизонтальных прямых, параллельных траектории центра проекции.

Пусть на рис. 5 дана прямая AB, параллельная оси X, расположенная в горизонтальной плоскости P с аппликатой Z. Если ось вращения пучка считать неподвижной, то луч, проектирующий из S бесконечно — удаленную точку прямой AB, направлен параллельно этой прямой, т. е. совпадает с траекторией центра проекции и пересекает картинную поверхность в точках *1* и *2,* расположенных на оси x, каждая на расстоянии $\frac{\pi}{2}$ от начала координат o.

Луч, рисующий точку M с абсциссой $X = 0$, пересекает картинную поверхность в точке m с абсциссой $x = 0$ и ординатой $z_0 = om$. Луч, рисующий произвольную точку N прямой AB, пересекает картинную поверхность в точке n с абс-

циссой $x = on_1$ и ординатой $z = n_1 n$. Если ортогональную проекцию луча на плоскость P назвать основанием его и обозначить буквой F, то из подобия прямоугольных треугольников nn_1S и SS^1N можно написать пропорцию $z : Z = f : F$, откуда

$$z = \frac{1}{F} fZ.$$

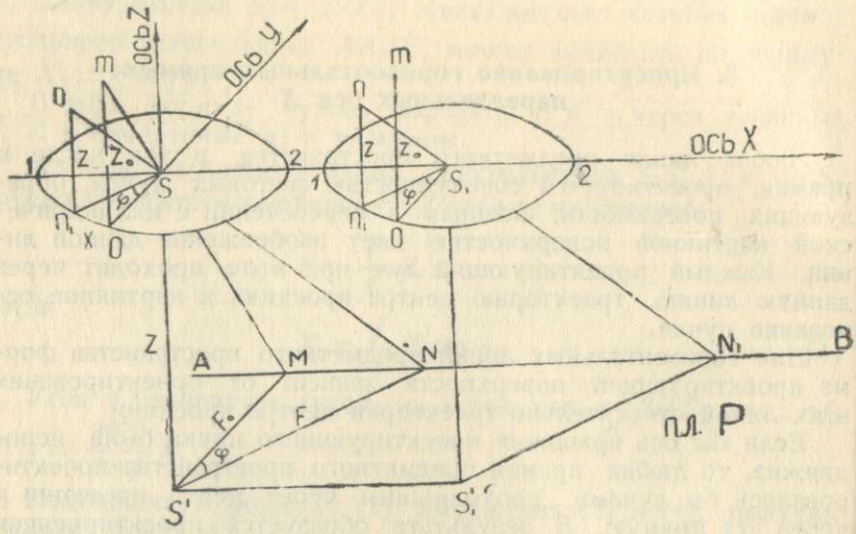


Рис. 5.

Для всех точек данной горизонтальной плоскости произведение f на Z величина постоянная, входящая в это выражение в виде коэффициента, который обозначим буквой K. Тогда формулы, связывающие ординату точки на снимке с основанием луча, проектирующего эту точку, получают такой вид

$$z = K\frac{1}{F} \tag{7}$$

или

$$F = K\frac{1}{z}. \tag{8}$$

Из этих формул видно, что наименьшему значению основания луча соответствует на картине наибольшая ордината z кривой. Наименьшая же величина основания луча получается при положении его, перпендикулярном прямой AB, т. е. когда $F_0 = У$, значит наибольшая ордината z_0 находится на картине в начале координат.

Кривая, изображающая прямую AB, на развертке представляет косинусоиду с амплитудой z_0 и полупериодом, равным πf.

Между прочим, из (7) следует, что как $zF = K$, так и $z_0 F_0 = K$, значит $zF = z_0 F_0$. Но из прямоугольного треугольника S^1MN можно написать $F_0 = F\cos\varphi$, тогда $zF = z_0 F_0 \cos\varphi$, откуда $z = z_0 \cos\varphi$, а заменив угол φ соответствующей ему дугой x, получим уравнение косинусоиды $z = z_0 \cos x$.

Все прямые, параллельные AB, изображаются синусоидальными кривыми с общим периодом и разными амплитудами z_0, зависящими от F_0 и от Z.

У нормальной косинусоиды амплитуда z_0 равна радиусу такой окружности, у которой длина составляет период $2\pi f$, т. е. длину оси x, развернутой в прямую. Значит у нормальной косинусоиды $z_0 = f$, у удлиненной $z_0 < f$, у укороченной $z_0 > f$. Линии, расположенные в вертикальной плоскости, проходящей через ось X, изобразятся в виде прямых.

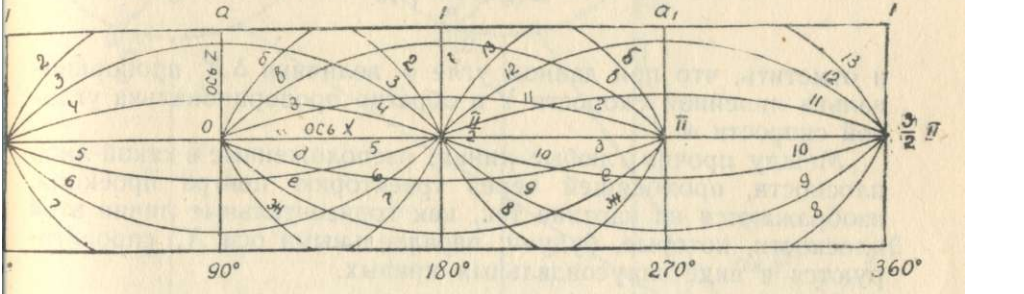


Рис. 6.

На рис. 6 показана развернутая картинная поверхность, соответствующая одному круговому циклу. На ней цифрой *1* обозначены вертикальные линии, изображающие горизонтальные прямые с ординатой $Y = 0$. Там же числами от 2 до 13 отмечены косинусоиды, изображающие горизонтальные линии предметного пространства, параллельные оси X, причём в пределах от 0° до 180° панорама отображает левую сторону относительно направления полета, а от 180° до 360° — правую. Об остальных линиях рис. 6 будет сказано в § 4.

Так обстоит дело при неподвижности оси вращения пучка.

Посмотрим теперь, как повлияет на изменение формы кривых перемещение оси вращения пучка. Проектирование бесконечно-удаленной точки и точки M в этом случае производится теми же лучами и так же, как и при неподвижной оси. Луч, ранее проектировавший произвольную точку N, теперь

не только повернется на угол φ, но вдобавок вместе с осью вращения и картинной поверхностью совершит поступательное движение на величину $\Delta X = SS_1 = S^1S_1^1$ и будет рисовать уже из S_1 другую точку прямой AB, именно точку N_1. Однако изображение точки N_1 все равно попадает в n, т. е. на построенную ранее кривую. Отсюда можно заключить, что горизонтальные прямые, параллельные оси X, при панорамной аэрофотосъемке изображаются такими же кривыми, как и при наземной съемке.

Зная угол φ, можно вычислить величину смещения ΔX по формуле

$$\Delta X = V\frac{T}{2\pi f}x.$$

Так как $\frac{T}{2\pi} = \frac{1}{\omega}$, а $\frac{x}{f} = \varphi$, то выражение для ΔX можно переписать так:

$$\Delta X = \frac{V}{\omega}\varphi,$$

и отметить, что при данном угле φ величина ΔX пропорциональна линейной скорости V и обратно пропорциональна угловой скорости ω.

Между прочим, любые линии, расположенные в какой-либо плоскости, проходящей через траекторию центра проекции, изображаются на картине так, как горизонтальные линии этой плоскости, которые, будучи параллельными оси X, спроектируются в виде синусоидальных кривых.

4. Проектирование других горизонтальных прямых

Горизонтальная прямая CD плоскости P (рис. 7), перпендикулярная оси X, изобразится следующим образом. Если бы ось вращения пучка оставалась неподвижной, то способ проектирования прямой CD из точки S был бы таким же, как и прямой AB на рис. 5, только абсциссы изображений a и a_1 бесконечно-удаленной точки и точки e_1 с наибольшей ординатой $z = e_1e$ сместились бы на картине по отношению к подобным точкам прямой AB на величину $\frac{\pi}{2}$. Значит, изображение горизонтальной прямой, перпендикулярной к траектории центра проекции, получится на картинной поверхности, развернутой в плоскость, в виде синусоиды. На рис. 6 в пределах половины панорамы от 90 до 270° показаны синусоиды,

обозначенные буквами *б*, *в*, ··· *ж*, являющиеся изображением прямых плоскости *P*, перпендикулярных траектории центра пучка. Вертикальные прямые, отмеченные буквой *а*, изображают горизонтальные линии плоскости *P*, попавшие в проектирующий пучок, когда последний занимал положение, перпендикулярное траектории. На рис. 6 видно, что фазы

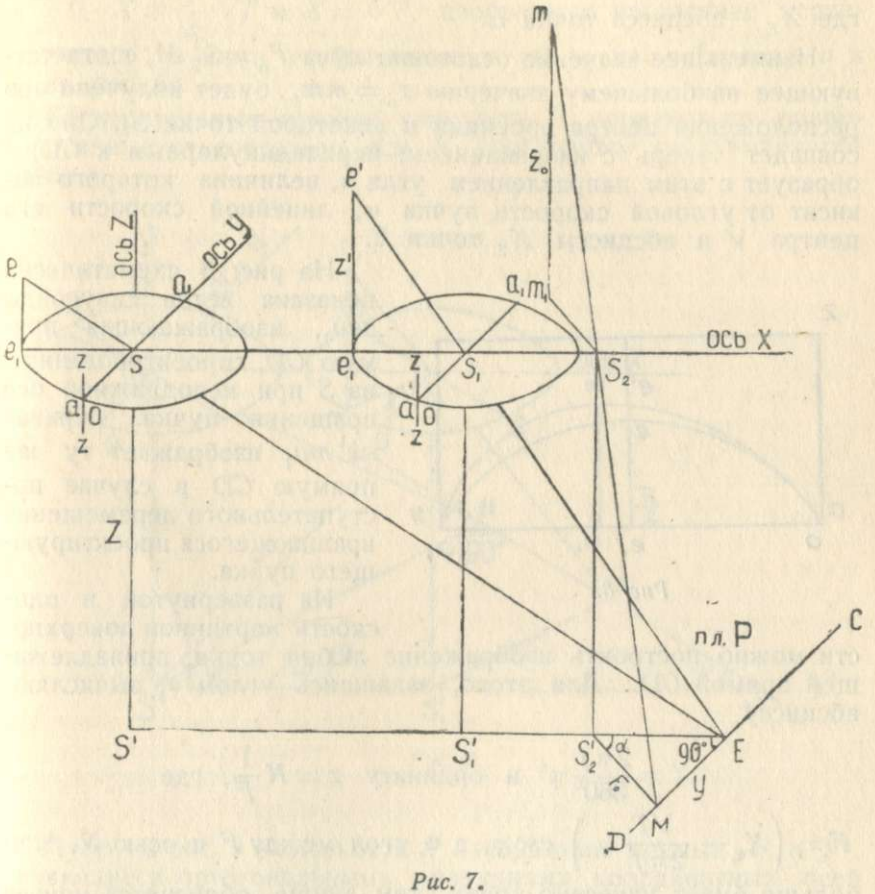


Рис. 7.

синусоидальных кривых, изображающих взаимно-перпендикулярные прямые горизонтальной плоскости *P*, отличаются на величину $\frac{\pi}{2}$.

При поступательном перемещении оси вращения пучка изображения a и a_1 бесконечно-удаленной точки прямой *CD* останутся на месте. Изображение e^1 точки *E* получается при

являются изображениями бесконечно-удаленной точки прямой EL. Точка N, как проектируемая лучом SN с наименьшим основанием S^1N, изобразится на картине в виде точки n с наибольшей ординатой $z_0 = n_1 n$ и абсциссой $x = on_1 = \frac{2\pi f}{360^\circ}\gamma$.

Поступательное движение оси вращения пучка не внесет изменений в проектирование бесконечно-удаленной точки прямой EL. Луч с основанием $S_1^1 N_1$, перпендикулярным прямой EL, теперь будет проектировать уже точку N_1 в виде n_1, потому что за время поворота на угол γ пучок успел переместиться на величину $SS_1 = S^1S_1^1 = \frac{VT}{2\pi}\gamma$. Ордината точки $n_1 z = n_1^1 n_1$ не будет наибольшей, так как при дальнейшем перемещении центра проекции из S_1 (вправо на рис. 9) и повороте пучка основание проектирующего луча уменьшится на величину, зависящую от соотношения поступательной и угловой скоростей пучка.

Задаваясь разными значениями угла поворота пучка, как и в случае с прямой CD, можно на картине построить кривую, изображающую горизонтальную прямую произвольного ориентирования EL.

При изображении горизонтальных линий предметного пространства, параллельных оси X, проектирующая поверхность имела плоскую форму, т. к. составляющие ее лучи проходили через две параллельные прямые. Проектирование других горизонтальных линий производится лучами, образующими сложную кривую поверхность, форма которой зависит от угла между изображаемой прямой и осью X и от параметров съемки V и ω.

5. Линии предметного пространства, изображающиеся на картине в виде прямых

Вертикальные прямые, а также любые другие прямые и кривые, целиком попавшие в плоскость проектирующего пучка, изобразятся на картине вертикальными линиями.

Горизонтальным линиям картины соответствуют на цилиндрической поверхности окружности, каждая из которых образована точками с одинаковыми ординатами z. Точки же с одинаковыми ординатами z получаются в результате проектирования лучом, имеющий постоянный наклон β к главному лучу (рис. 10). В этом случае $z = f\,\mathrm{tg}\beta$. Проектирующая поверхность, образованная таким лучом, называется поверхностью одинакового ската. Все, что на ней расположено в пред-

метном пространстве, изобразится на картине в виде горизонтальной прямой.

Возьмем в предметном пространстве горизонтальную плоскость Q с аппликатой Z и проектирующий луч SA с углом наклона β. На рис. 10 показано несколько положений проектирующего луча SA, S_1A_1 ... S_4A_4 в пределах второй четверти панорамы. Там же отмечены точки a, a_1, ... a_4, являющиеся изображением точек A, A_1, ... A_4 плоскости Q. Основание F взятого луча будет неизменным на плоскости Q и равно $F = Z \operatorname{ctg} \beta$.

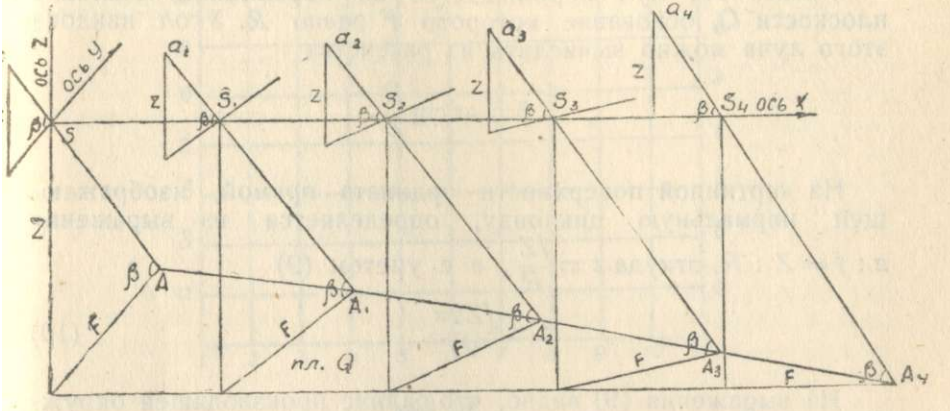


Рис. 10.

Во время съемки основание проектирующего луча будет вращаться с угловой скоростью $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и перемещаться с линейной скоростью V. Сам луч пройдет на плоскости Q через кривую циклоидального типа AA_4. В зависимости от угла β это будет нормальная, укороченная или удлиненная циклоида. Во всяком случае все другие лучи проектирующего пучка также пройдут на плоскости Q через кривые циклоидального типа, среди которых одна будет нормальная, а остальные удлиненные или укороченные. Каждой из циклоид горизонтальной предметной плоскости соответствует на панораме прямая, параллельная оси x.

Определим параметры этих кривых в зависимости от элементов съемки.

Известно, что нормальная циклоида образуется какой-либо точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой. В нашем случае центр этой окружности перемещается по ортогональной проекции оси X на плоскости Q; радиус R этой окружности и подлежит определению. Точки, находящиеся

внутри круга, опишут укороченные циклоиды, а точки, лежащие вне круга, — удлиненные.

Качение производящей окружности без скольжения происходит в том случае, когда длина ее $2\pi R$ равна пути VT, проходимому осью пучка за время одного цикла.

Следовательно, должно существовать равенство $2\pi R = VT$, откуда

$$R = \frac{VT}{2\pi}. \qquad (9)$$

Только тот луч перемещается по нормальной циклоиде плоскости Q, основание которого F равно R. Угол наклона этого луча можно вычислить из равенства

$$\beta = \operatorname{ar\,ctg} \frac{R}{Z}.$$

На картинной поверхности ордината прямой, изображающей нормальную циклоиду, определяется из выражения $z : f = Z : R$, откуда $z = \frac{fZ}{R}$, а с учетом (9)

$$z = \frac{fZ2\pi}{VT}. \qquad (10)$$

Из выражения (9) видно, что радиус производящей окружности зависит только от V и T, следовательно, он для всех горизонтальных плоскостей предметного пространства одинаков.

Если в формуле (10) изменить Z, т. е. взять другую горизонтальную плоскость, то изменится и z. Это значит, что для каждой горизонтальной плоскости предметного пространства получается на снимке своя горизонтальная прямая, изображающая нормальную циклоиду именно этой плоскости.

Вертикальным линиям картинной поверхности соответствует на горизонтальной плоскости веер полупрямых, начальные точки которых лежат на проекции траектории центра пучка и имеют абсциссы X, определяемые из выражения:

$$X = \frac{VT}{2\pi f} x, \qquad (11)$$

где: x — абсцисса данной вертикальной линии снимка.

Угол A, составленный какой-либо полупрямой с проекцией оси $У$, можно вычислить по формуле

$$A^0 = \frac{360^0}{2\pi f} x. \qquad (12)$$

Если на картине взять сеть квадратов, образованную горизонтальными и вертикальными прямыми (рис. 11), то на горизонтальной плоскости предметного пространства ей будет соответствовать сетка, состоящая из полупрямых и циклоид-схематически изображенная на рис. 12. Соответственные ли, нии на рис. 11 и 12 имеют одинаковые обозначения. При рав-

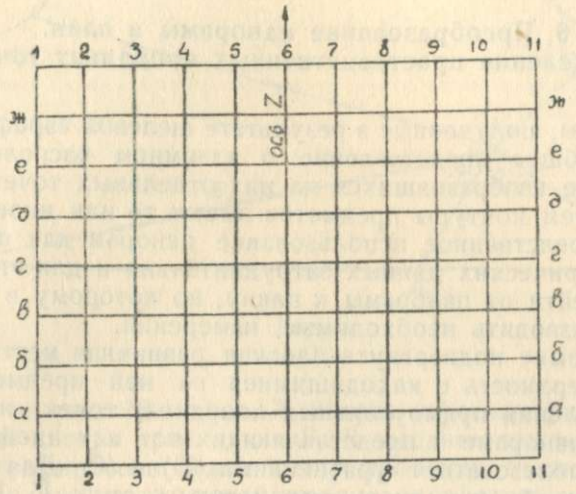


Рис. 11.

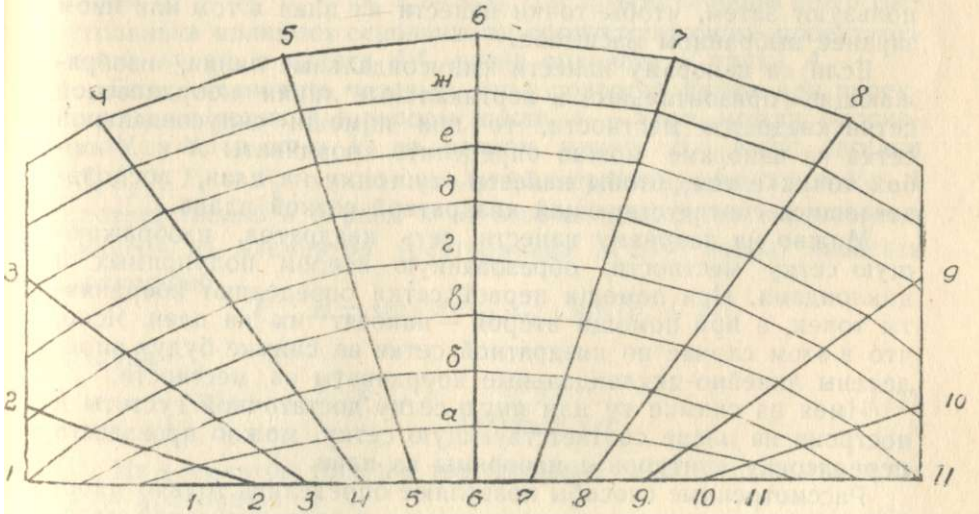


Рис. 12.

ных расстояниях между горизонтальными линиями на картине промежутки между циклоидами будут разными и наоборот.

Наклонной прямой на развернутой картине соответствует на цилиндрической поверхности винтовая линия, а в предметном пространстве — кривая двоякой кривизны.

6. Преобразование панорамы в план. Определение пространственных координат точек

Панорамы, полученные в результате щелевой аэрофотосъемки, дают общее представление о взаимном расположении в пространстве изобразившихся на них отдельных точек и предметов, причем контуры предметов имеют то или иное искажение. Непосредственное использование панорам для получения по ним метрических данных затруднительно и для этих целей лучше перейти от панорамы к плану, по которому в дальнейшем и производить необходимые измерения.

Если съемке подвергнута плоская равнинная местность или водная поверхность с находящимися на ней предметами, то для определения прямоугольных координат точек, изобразившихся на панораме и представляющих тот или иной интерес, можно воспользоваться уравнениями (5) и (6). Для решения этих уравнений надо знать параметры съемки V, T, f, Z и измерить на панораме координаты x и z изображения точки, что легко сделать, если указаны оси этих координат.

Полученные по (5) и (6) прямоугольные координаты используют затем, чтобы точки нанести на план в том или ином заранее выбранном масштабе.

Если на панораму нанести синусоидальные линии, изображающие горизонтальные и вертикальные линии координатной сетки квадратов местности, то при помощи синусоидальной сетки на панораме можно определить координаты X и Y любой точки с тем, чтобы нанести эту точку на план, воспользовавшись соответствующей квадратной сеткой плана.

Можно на панораму нанести сеть квадратов, изображающую сетку местности, образованную веером полупрямых и циклоидами. При помощи первой сетки определяют координаты точек, а при помощи второй — наносят их на план. Ясно, что в этом случае по квадратной сетке на снимке будут определены линейно-циклоидальные координаты на местности.

Имея на снимке ту или иную сетку достаточной густоты и построив на плане соответствующую сетку, можно произвести перерисовку контуров с панорамы на план.

Рассмотренные способы позволяют определить только плоские координаты точек, расположенных в горизонтальной плоскости с известной аппликатой Z, равной высоте полета.

Для определения пространственных прямоугольных координат какой-либо точки нужно иметь ее изображение на двух панорамах, полученных при двух несовпадающих положениях центра проекции, т. е. в соседних циклах.

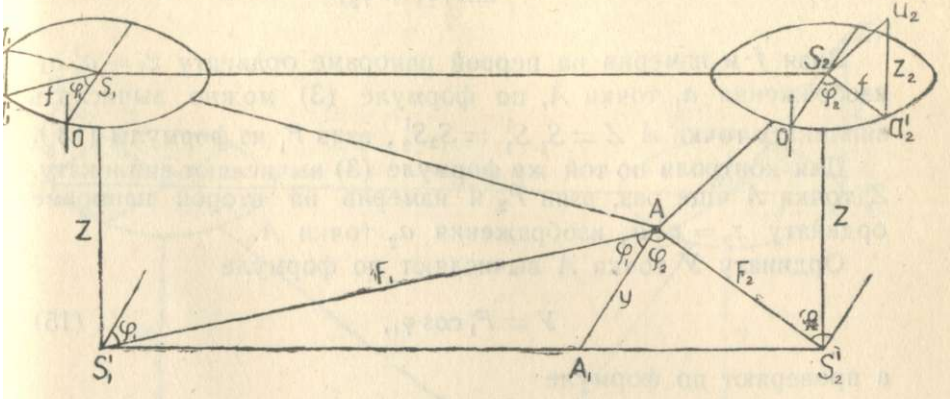


Рис. 13.

Пусть на рис. 13 точка A сперва сфотографирована при положении центра проекции в S_1. В соседнем цикле та же точка сфотографирована, когда центр проекции занимал положение S_2. Положение точки A можно определить из треугольника $S_1^1 AS_2^1$, в котором сторона $S_1^1 S_2^1$ является базисом засечки точки A и равна расстоянию между положениями центра проекции S_1 и S_2, т. е. $S_1^1 S_2^1 = S_1 S_2$. Две другие стороны этого треугольника являются основаниями соответствующих проектирующих лучей, а высота AA_1 равна ординате $У$ точки A.

Если обозначить через φ_1 угол поворота пучка при проектировании точки A в первом цикле, φ_2 — угол между плоскостью пучка и осью $У$ во втором цикле, B — базис засечки $(S_1^1 S_2^1)$, F_1 и F_2 основания лучей, проектирующих точку A соответственно в первом и во втором циклах, то по теореме синусов из элементов треугольника $S_1^1 S_2^1 A$ можно написать пропорцию

$$F_1 : B = \sin(90^0 - \varphi_2) : \sin(\varphi_1 + \varphi_2),$$

откуда

$$F_1 = B \frac{\cos \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}. \qquad (13)$$

Из элементов того же треугольника можно написать вторую пропорцию

$$F_2 : B = \sin(90^0 - \varphi_1) : \sin(\varphi_1 + \varphi_2),$$

откуда

$$F_2 = B\frac{\cos\varphi_1}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}. \qquad (14)$$

Зная f и измерив на первой панораме ординату $z_1 = a_1^1 a_1$ изображения a_1 точки A, по формуле (3) можно вычислить аппликату точки A $Z = S_1 S_1^1 = S_2 S_2^1$, взяв F_1 из формулы (13).

Для контроля по той же формуле (3) вычисляют аппликату Z точки A еще раз, взяв F_2 и измерив на второй панораме ординату $z_2 = a_2^1 a_2$ изображения a_2 точки A.

Ординату $У$ точки A вычисляют по формуле

$$У = F_1\cos\varphi_1, \qquad (15)$$

а проверяют по формуле

$$У = F_2\cos\varphi_2.$$

Абсциссу точки A вычисляют по формуле

$$X = X_1 + F_1\sin\varphi_1, \qquad (16)$$

а проверяют по формуле

$$X = X_1 + B - F_2\sin\varphi_2,$$

где X_1 — абсцисса центра проекции при положении его в точке S_1.

Остается выяснить способ определения величин X_1, X_2, B, φ_1 и φ_2 по заданию V, T, f и измеренным $x_1 = oa_1^1$, $x_2 = oa_2^1$, z_1, z_2.

Из § 2 и рис. 13 следует, что

$$\varphi_1 = \frac{360^0}{2\pi f}x_1, \quad \varphi_2 = \frac{360^0}{2\pi f}x_2, \quad X_1 = \frac{VT}{2\pi f}x_1, \quad X_2 = \frac{VT}{2\pi f}x_2,$$

$$B = VT - (X_1 - X_2).$$

Если нужно вычислить отметки H точек относительно горизонтальной плоскости, имеющей аппликату Z_0, то для этого нужно образовать разности $Z_0 - Z = H$.

Положение точки A на плане можно определить графическим приемом при помощи засечек из точек S_1^1 и S_2^1 по углам φ_1 и φ_2.

Если точка A окажется в вертикальной плоскости, проходящей через ось X, т. е. ордината её $У = 0$, как на рис. 14, то $F_1 + F_2 = B = \frac{1}{2} VT$.

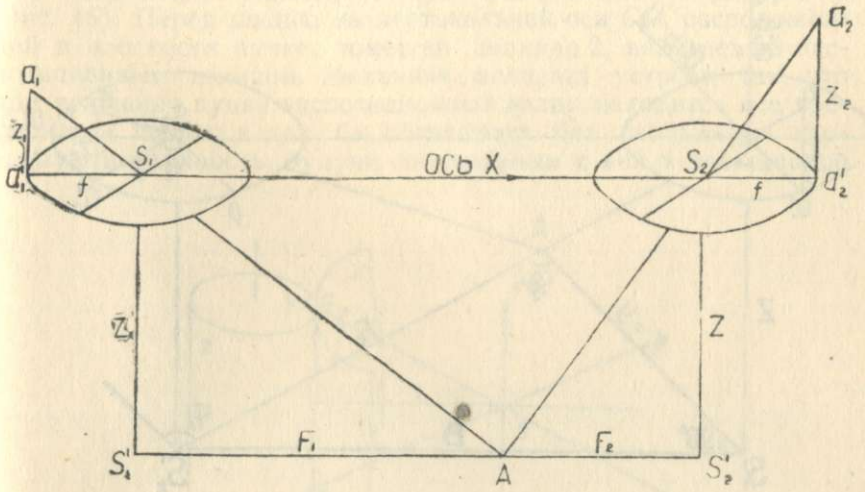


Рис. 14.

По заданному f и измеренным на панорамах $z_1 = a_1^1 a_1$, и $z_2 = a_2^1 a_2$ можно написать выражения для F_1 и F_2, применив формулу (3) $F_1 = Z\frac{f}{z_1}$, $F_2 = Z\frac{f}{z_2}$. Взяв сумму этих выражений, получим $F_1 + F_2 = \frac{1}{2} VT = Z\left(\frac{f}{z_1} + \frac{f}{z_2}\right)$, откуда после простых преобразований

$$Z = \frac{1}{2} \frac{VTz_1z_2}{f(z_1 + z_2)}. \qquad (17)$$

Теперь можно вычислить F_1 и абсциссу X точки A

$$X = \frac{1}{4} VT + Z\frac{f}{z_1}. \qquad (18)$$

Если точка A окажется в вертикальной плоскости, проходящей через ось $У$, т. е. когда абсцисса ее $X_1 = 0$, а ордината

$У = F_1$, как на рис. 15, то базисный треугольник $AS_1^1 S_2^1$ станет прямоугольным и все вычисления упрощаются, а формулы для определения B, $У$, F и Z принимают следующий вид.

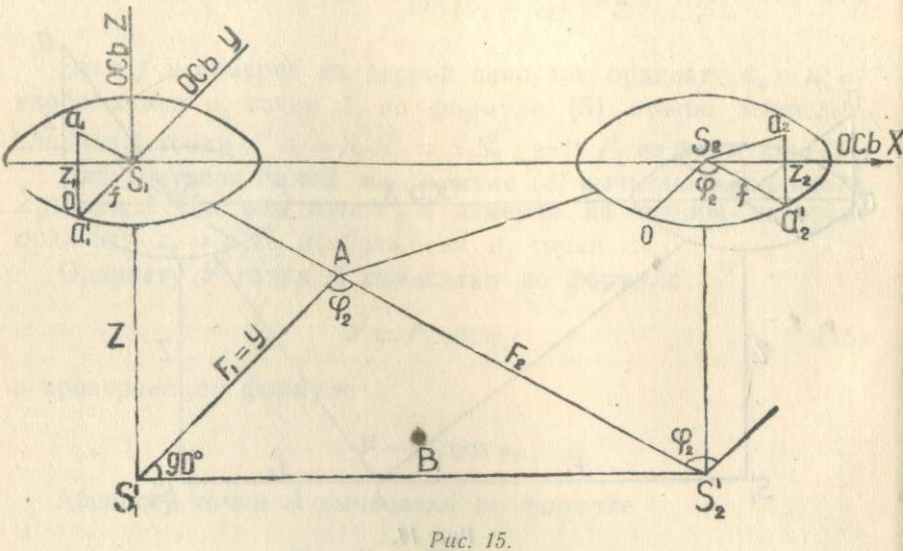


Рис. 15.

Так как $\varphi_1 = 0$, $X_1 = 0$, $X_2 = \frac{VT}{2\pi f} x_2$, а $\varphi_2 = \frac{360^0}{2\pi f} x_2$, то

$$B = VT + X_2, \quad У = F_1 = B \operatorname{ctg} \varphi_2, \quad Z = У \frac{z_1}{f}.$$

Для контроля можно вычислить аппликату $Z = S_1 S_1^1 = S_2 S_2^1$ по результатам измерений на панораме, полученной из точки S_2.

Тогда

$$Z = F_2 \frac{z_2}{f},$$

где $F_2 = B \operatorname{csc} \varphi_2$, что следует из прямоугольного треугольника $AS_1^1 S_2^1$.

7. Аппаратура для съемки панорам и ее применение

Для съемки круговых панорам можно использовать фотоаппарат, сконструированный В. С. Семеновым в 1946 году. Основные данные этого прибора таковы: картинное расстояние 214 *мм*, ширина пленки 19 *см*, вертикальный картинный угол

около 50°, ширина щели 2 *мм*, запас пленки 9 *м*, длина круговой панорамы 132 *см*. Щель *ab*, являющаяся картинным основанием проектирующего пучка *aSb*, вращаясь вместе с аппаратом вокруг неподвижной вертикальной оси его *MN*, описывает картинную цилиндрическую поверхность 1 радиуса *f* (рис. 16). Перед щелью на вертикальной оси *CD*, расположенной в плоскости пучка, помещен цилиндр 2, называемый экспозиционным валиком. Механизм аппарата устроен так, что при вращении пучка экспозиционный валик находится все время перед щелью и как бы обкатывает без скольжения картинную поверхность, будучи соединенным с ней в планетарной

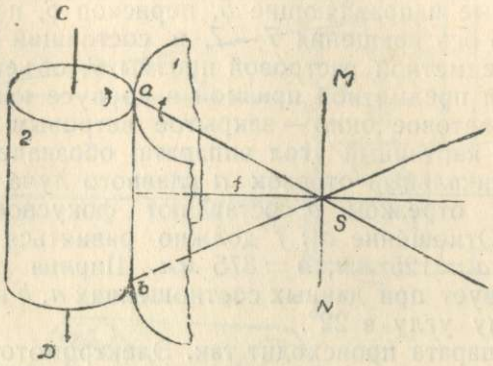


Рис. 16.

схеме. Одновременно через экспозиционный валик перед щелью передвигается светочувствительная пленка, как бы обертывающая поверхность 1 и таким образом принимающая на себя фотоизображение панорамы, т. е. является в сущности картинной поверхностью.

Двигательный механизм фотоаппарата работает от электромотора постоянного тока напряжением в 24 вольта и устроен так, что линейная скорость картинного основания и скорость передвижения пленки одинаковы. В дальнейшем будет показано, что при панорамной аэрофотосъемке эти скорости обычно бывают разными.

Более подробное описание этого прибора можно найти в статье „Наземная щелевая фотограмметрическая съемка" [3]. Название его Щафацикл — 21 расшифровывается так: щелевой аэрофотоаппарат с фокусом 21 *см*. Хотя прибор предназначен для наземной съемки, однако назван так потому, что основные детали его взяты из разных аэрофотоаппаратов.

Круговые панорамы имеют существенный недостаток, заключающийся в том, что при разных положениях пучка отно-

сительно траектории полета получаются весьма неравномерные искажения изображений. Поэтому практически целесообразно ограничивать панорамы горизонтальными картинными углами в 90° или 120°, располагая биссектрисы их по перпендикуляру к траектории полета, т. е. выполняя съемку с одной какой-либо стороны траектории полета.

Для такой съемки В. С. Семенов сконструировал в 1945 году перископический щелевой аэрофотоаппарат с фокусным расстоянием 500 *мм*.

Взаимное расположение основных деталей этого аппарата схематически показано на рис. 17. В корпусе *1* помещены две катушки: сдающая *2* и наматывающая *3*; измерительный валик *4*, дугообразные направляющие *5*, перископ *6*, посаженный на вертикальную ось вращения *7 — 7*, и состоящий из картинной призмы *8*, предметной растровой призмы *9*, объектива *10*. Перед растровой предметной призмой в корпусе камеры сделано отверстие — световое окно — закрытое ветровым стеклом. Горизонтальный картинный угол аппарата, обозначенный 2β, равен 90°. Вертикальный отрезок a главного луча вместе с горизонтальным отрезком b составляют фокусное расстояние $f = 500$ *мм*. Отношение $a : f$ должно равняться $2\beta : 2\pi$, т. е. 1 : 4, значит $a = 125$ *мм*, $b = 375$ *мм*. Ширина пленки 24 *см*, что соответствует при данных соотношениях a, b и f вертикальному картинному углу в 22°.

Работа аппарата происходит так. Электромотор, питающийся от бортовой сети самолета напряжением в 24 вольта, вращает наматывающую катушку *3*, на которую непрерывно поступает экспонированная пленка *13*, пройдя путь от сдающей катушки *2* через дугообразные направляющие *5* и измерительный валик *4*, приводя последний в движение.

Измерительный валик *4* соединен цепной передачей *11* с перископом *6*, благодаря чему перемещение пленки согласовывается с вращением перископа.

Растровая предметная призма обеспечивает проектирование местности практически плоским световым пучком. Когда при вращении перископа предметная призма полностью пройдет перед световым окном, проектирующий пучок повернется на угол $2\beta = 90°$, а его картинное основание *12* опишет дугу $MN = 2\pi b : 4$, скользя по пленке *13*, которая при помощи дугообразных направляющих *5* принимает форму боковой поверхности цилиндра радиуса b.

Существенной особенностью проектирования неподвижных предметов на неподвижную же пленку через перископическую систему аппарата является подвижность получаемого изображения их, приводящая к тому, что изображение оказывается сжатым по горизонтали и составляет от нормальной величины часть, определяемую отношением $b : f = 3 : 4$. Значит, на пленку длиною MN через перископическую систему спроектиру-

ется то, что при нормальных условиях должно проектироваться на длину $MT = MN + NT = \frac{3}{4} MT + \frac{1}{4} MT$. Для получения изображения, не искаженного по горизонтали, пленка должна передвигаться с такой скоростью, чтобы каждая точка

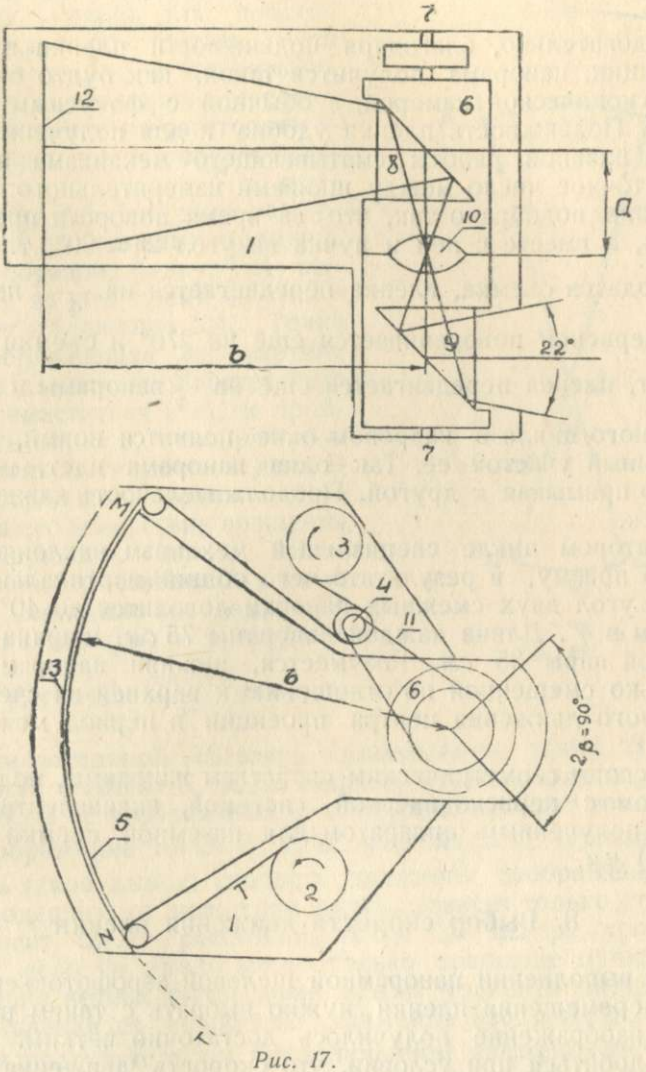


Рис. 17.

её прошла путь, равный $NT = \frac{1}{4} MT$, за время передвижения картинного основания по дуге MN. Тогда длина панорамы MT

получится равной $MN + NT$. Но $MN = \frac{1}{4} 2\pi b = \frac{3}{4} MT =$

$= \frac{b}{f} MT$, значит $\frac{1}{4} 2\pi b = \frac{b}{f} MT$, откуда $MT = \frac{1}{4} 2\pi f$.

Следовательно, благодаря подвижности пленки в момент экспозиции, панорама получится такой, как будто она снята неперископической камерой, а обычной с фокусным расстоянием f. Подвижность пленки удобна и для получения непрерывной плавной работы сматывающего механизма аппарата. Передаточное число между шкивами измерительного валика и перископа подобрано так, что за время поворота предметной призмы, а вместе с ней и пучка на угол $2\beta = 90°$, т. е. когда производится съемка, плёнка передвигается на $\frac{1}{4}$ панорамы. Пока перископ поворачивается ещё на 270° и съемки не происходит, пленка передвигается ещё на $\frac{3}{4}$ панорамы и к началу очередного цикла в кадровом окне появится новый, неэкспонированный участок её. Так одна панорама идет, непосредственно примыкая к другой. Продолжительностъ каждого цикла 2 сек.

Во втором цикле специальный механизм наклоняет предметную призму, в результате чего общий вертикальный картинный угол двух смежных панорам доводится до 40° с перекрытием в 4°. Длина каждой панорамы 75 *см*, ширина смонтированной пары 35 *см*. Разумеется, нижняя панорама будет несколько смещенной по отношению к верхней за счет поступательного движения центра проекции в период между циклами.

По своим геометрическим свойствам панорамы, полученные прибором с перископической системой, эквивалентны панорамам, полученным аппаратом для наземной съёмки с фокусом 500 *мм*.

8. Выбор скорости движения пленки

При выполнении панорамной щелевой аэрофотосъемки скорость перемещения пленки нужно выбрать с таким расчетом, чтобы изображение получилось достаточно четким. А этого можно добиться при условии, что скорость движения изображения на картинной поверхности везде будет одинаковой и равна скорости движения пленки.

Поскольку при панорамной аэрофотосъемке проектирующий пучок и каждый его луч совершает вращательное и поступа-

тельное движение, то скорость перемещения изображения точек предметного пространства на цилиндрической поверхности будет зависеть от угловой скорости пучка ω и от линейной скорости центра проекции его V. Рассмотрим влияние каждой из этих скоростей на величину перемещения точки a (рис. 18).

Вследствие относительности движения, можно для простоты рассуждений считать, что центр проекции S и проектирующие лучи неподвижны, а точка A, находящаяся на расстоянии F от S, вращается в горизонтальной плоскости вокруг S и проходит путь AA_1 по дуге радиуса $F = SA$ за единицу времени. Таким образом, радиус SA повернется за это время на угол ω и займет положение SA_1. Точка a, изображающая на картине точку предметного пространства A, переместиться в a_1, и пройдет путь $aa_1 = v_1$, который будет линейной скоростью движения изображения точки a, происходящего вследствие вращения проектирующего пучка. Этот путь равен произведению f на ω, если ω выражено в радианной мере; значит $aa_1 = v_1 = f\omega = \frac{AA_1}{F} f$, так как $\frac{\smile AA_1}{F} = \omega$.

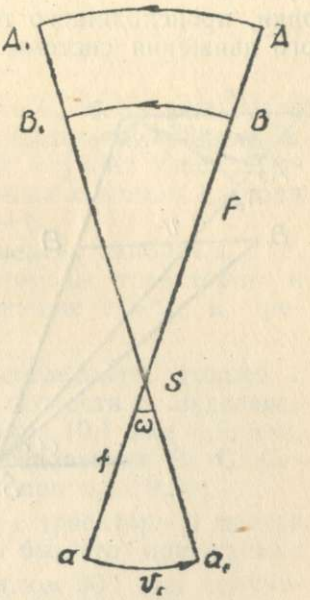


Рис. 18.

Если на прямой AS взять произвольную точку B на расстоянии $F_1 = SB$ от S, то за единицу времени она переместится в B_1, а ее изображение a на картине пройдет тот же путь, что изображение точки A, т. е. дугу $aa_1 = v_1$. Отсюда можно сделать такой вывод: скорость движения изображения точки, происходящего от вращения пучка, зависит только от f и ω и не зависит от F — расстояния точки до центра проекции S. Значит, если бы имело место только вращение пучка, то для получения четких фотографий нужно уравнять скорость движения плёнки со скоростью движения изображения $v_1 = f\omega$.

При поступательном прямолинейном движении центра вращающегося пучка к перемещению изображения, происходящему на картине за счет угловой скорости ω, добавится перемещение, вызываемое поступательным движением проектирующей системы.

Опять для простоты рассуждений допустим, что центр проекции S неподвижен (рис. 19), пучок не вращается, а точка A перемещается в предметном пространстве параллельно траектории пучка SS_1 и за единицу времени проходит отрезок $AA_1 = V$. Этот отрезок на картине изобразится в виде дуги $aa_1 = v_2$, выражающей скорость перемещения изображения точки, происходящего только от прямолинейного поступательного движения системы.

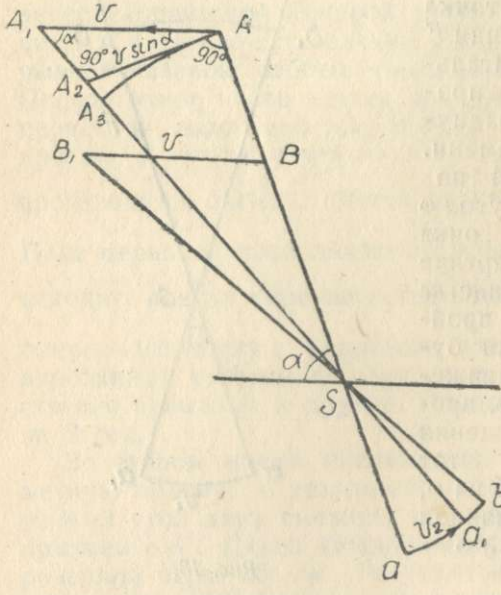


Рис. 19.

По данным рис. 19 можно написать такую пропорцию

$$\smile aa_1 : \smile AA_3 = f : F$$

или

$$v_2 : AA_3 = f : F. \quad (19)$$

Если единица времени стремится к нулю, то отрезок AA_1 будет уменьшаться и выразит в пределе значение линейной скорости в точке A. При этих условиях длину дуги AA_3 можно считать равной длине касательной AA_2, а эта последняя из треугольника A_1A_2A, который принимается за прямоугольный, вследствие малости угла ASA_1, равна $V\sin\alpha$.

Тогда $\smile AA_3 = AA_2 = V\sin\alpha$ и пропорция (19) примет такой вид

$$v_2 : V\sin\alpha = f : F,$$

откуда

$$v_2 = \frac{fV}{F}\sin\alpha, \quad (20)$$

где: E — расстояние точки A от центра проекции S, а α — угол между осью X и лучом SA, проектирующим эту точку.

Из (20) видно, что скорость движения изображения точки, происходящего за счет поступательного перемещения центра проекции, зависит от F и от α, т. е для разных точек предметного пространства различна. На рис. 19 это ясно видно на примере точки B, изображение которой за единицу времени

переместилось на величину ab, не равную aa_1, хотя $BB_1 = AA_1 = V$.

Суммарная скорость v движения изображения складывается из угловой v_1 и линейной скоростей системы v_2, т. е. $v = v_1 + v_2$ или

$$v = f\omega + \frac{Vf}{F}\sin\alpha. \qquad (21)$$

Скорость v_2 меняет не только величину, но и знак, если $\alpha > 180°$. По абсолютной величине v_2 достигает максимума, когда $\alpha = 90°$ и $\alpha = 270°$, ибо $\sin\alpha$ в этих случаях равен соответственно $+1$ и -1. При других значениях α $\sin\alpha < 1$, а при $\alpha = 0°$, $\alpha = 180°$, $\alpha = 360°$ $\sin\alpha = 0$ и $v_2 = 0$.

Следовательно, в первой и второй четвертях панорамы, т. е. когда съемка производится с левой стороны траектории и пучок движется по часовой стрелке, значение $v > v_1$, в третьей и четвертой четвертях $v < v_1$.

Ясно, что движение пленки можно согласовать только с одним каким-либо значением суммарной скорости v. Задаваясь величиной допустимого сдвига изображения (0,1 или 0,2 *мм*), можно определить эту скорость. По исследованиям В. С. Семенова хорошие результаты получаются при $v_2 \leqslant 0{,}2v_1$.

Когда проектирующий луч совпадает с траекторией центра проекции, то $v_2 = 0$, а $v = v_1$. Казалось бы, что при съемке панорам с горизонтальным картинным углом 90° для получения на картине минимума искажений биссектрису этого угла следует совмещать с осью X и съемку вести вперед или назад по направлению полета. Однако практически это осуществить затруднительно, так как при съемке вперед поле зрения аэрофотоаппарата может частично закрываться шасси и другими деталями контура самолета, находящимися в носовой части его, а при съемке назад в поле зрения попадает хвостовое оперение.

9. Съемка панорам на вираже

Когда самолет делает вираж, то аэрофотоаппарат вместе с самолетом совершает поступательное движение по кругу и одновременно поворачивается вокруг оси MN. Если на самолете установить АЩАФА — 2, предназначенный для плановой маршрутной аэрофотосъемки [1], то расположение проектирующего пучка и его элементов будет таким, как показано на рис. 20. Вершина пучка S будет совершать поступательное движение по кругу радиуса $r = MS$ на высоте H над участком съемки. Главный луч SO располагается перпендикулярно линии SN, соединяющей вершину пучка S с основанием оси

вращения MN, и образует с вертикалью угол α. Боковые лучи, ограничивающие пучок, занимают положение SA и SB и при пересечении с поверхностью земли определяют пределы зоны фотографирования, имеющей форму кругового кольца, ограниченного окружностями, радиусы которых соответственно равны $R_A = NA$ и $R_B = NB$.

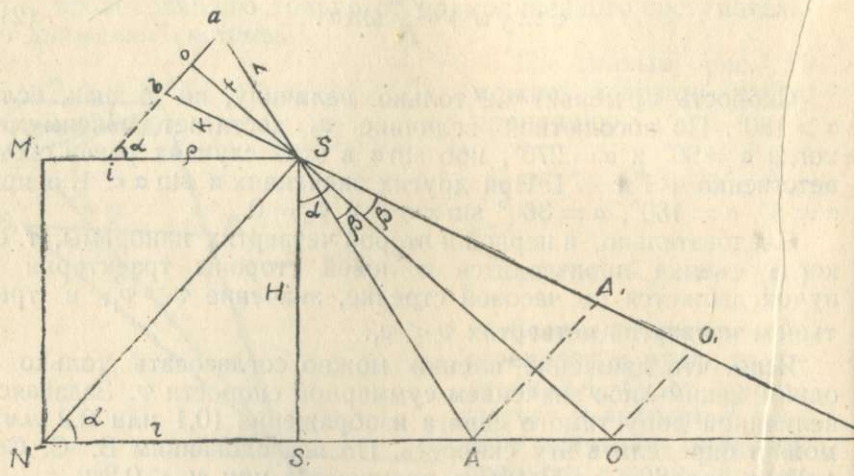


Рис. 20.

Так как вертикальная линия MN лежит в плоскости проектирующего пучка и является его осью вращения, тот этот случай принципиально не отличается от способа наземной щелевой фотограмметрической съемки с наклонным главным лучом [3].

Хотя картинное основание совершает движение по конусу, проектирование производится на цилиндрическую картинную поверхность, ось которой параллельна картинному основанию пучка.

На развернутой в плоскость панораме вертикальным линиям соответствуют радиальные прямые зоны фотографирования, а горизонтальным линиям — дуги окружностей, центром которых является точка N.

Если известны параметры съемки H, α, f и ab, то можно установить метрические характеристики полученной панорамы.

Радиус окружности $R_0 = NO$, описываемой главным лучом SO, определяется из прямоугольного треугольника NSO по формуле

$$R_0 = H \operatorname{ctg} \alpha + H \operatorname{tg} \alpha = 2H \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

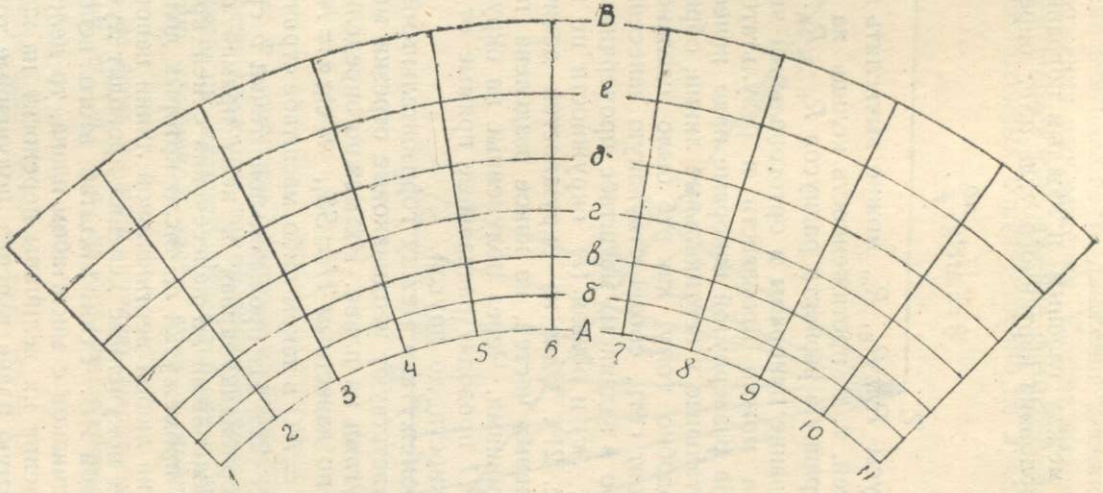


Рис. 21.

Радиусы пограничных окружностей R_A и R_B получают по формулам

$$R_A = H \operatorname{ctg} \alpha + H \operatorname{tg} (\alpha - \beta),$$

$$R_B = H \operatorname{ctg} \alpha + H \operatorname{tg} (\alpha + \beta),$$

где: β — угол между главным и каждым пограничным лучом пучка, т. е. половина картинного угла aSb, определяемая по формуле

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{ao}{f}.$$

Зная радиусы R_O, R_B, R_o, можно вычислить длину каждой из окружностей, т. е. протяженность кольца на местности и его ширину, равную разности радиусов $R_B - R_A$.

Преобразование панорамы в ортогональный чертеж заданного масштаба можно произвести в результате следующих построений. На развернутой панораме надо нанести равностоящие горизонтальные и вертикальные линии, образующие сеть квадратов, подобно тому, как это было сделано на рис. 11. На плане строят сеть, соответствующую нанесенной на панораме, для чего в заданном масштабе прочерчиваются две пограничные (*а*, *ж*) и осевая (*г*) окружности по известным их радиусам (рис. 21). Одна из окружностей делится на такое количество равных частей, на какое разделена панорама вертикальными линиями. Через полученные на окружности деления *1*, *2*, . . . *11* проводят радиальные прямые от одной пограничной окружности до другой.

Равным промежуткам между горизонтальными прямыми на панораме соответствуют неодинаковые отрезки между концентрическими дугами на плане. Их можно определить графически, для чего по известным $H = SS_1$, $H \operatorname{ctg} \alpha = NS_1$, $R_A = NA$, $R_B = NB$, $R_O = NO$ в каком-либо масштабе строится треугольник ASB (рис. 22). Из произвольной точки *о* среднего луча проводится перпендикулярная к нему прямая *ab* и делится между продолженными до пересечения с ней крайними лучами на равные промежутки *с*, число которых должно быть таким же, как на любой вертикальной линии панорамы. Из вершины S через полученные деления проводят лучи до пересечения с прямой AB. Если масштаб этого вспомогательного построения одинаков с масштабом плана, то деления с прямой AB без изменения их величины переносят на какую-либо радиальную прямую плана и через полученные точки проводят дуги концентрических окружностей *А*, *б*, . . . *В*. Если упомянутые масштабы разные, то перенос отрезков с AB на план производят с учетом отношения масштабов.

Отметив однозначные линии на плане и на панораме, пользуясь полученными сетками, можно произвести перерисовку контуров и перенести с панорамы на план отдельные точки и предметы.

Для определения радиуса картинной цилиндрической поверхности нужно знать скорость движения пленки, а она равна скорости движения изображения. Сперва выясним, с какой скоростью перемещается изображение фотографируемых точек A, B и O, расположенных соответственно на лучах SA, SB и SO (рис. 20).

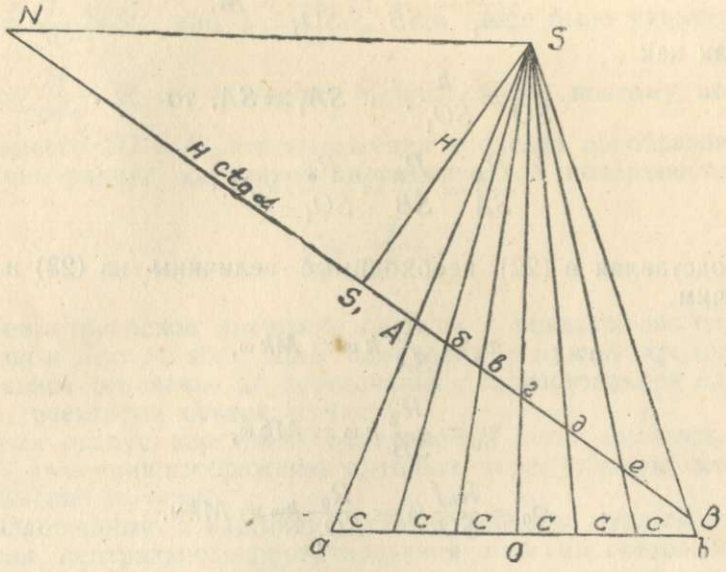


Рис. 22.

Известно, что v — скорость движения изображения точки равна V — скорости движения самой точки в предметной плоскости, умноженной на масштаб. Масштаб же в данной точке равен отношению картинной части луча к предметной его части.

Основываясь на этом, можно написать выражения для скоростей движения v_a, v_b и v_o изображения точек a, b и o

$$v_a = V_A \frac{k}{SA}, \quad v_b = V_B \frac{k}{SB}, \quad v_0 = V_0 \frac{f}{SO}. \qquad (22)$$

Правую часть этих выражений преобразуем следующим образом. Точки A, B и O находятся на окружностях радиусов

соответственно R_A, R_B и R_o, поэтому при угловой скорости движения центра пучка, а следовательно и этих радиусов, равной ω, существуют равенства

$$V_A = R_A \omega, \quad V_B = R_B \omega, \quad V_o = R_o \omega. \tag{23}$$

Если из точек A и O провести линии AA_1 и OO_1, параллельные NS, то можно написать такие отношения

$$\frac{R_A}{SA_1} = \frac{R_B}{SB} = \frac{R_o}{SO_1} = M.$$

Но так как

$$\frac{f}{SO} = \frac{k}{SO_1}, \text{ а } SA_1 = SA, \text{ то}$$

$$\frac{R_A}{SA} = \frac{R_B}{SB} = \frac{R_o}{SO_1} = M. \tag{24}$$

Подставляя в (22) необходимые величины из (23) и (24), получим

$$v_a = \frac{R_A}{SA} k\omega = Mk\omega,$$

$$v_b = \frac{R_B}{SB} k\omega = Mk\omega,$$

$$v_0 = \frac{R_0 f}{SO} \omega = \frac{R_o}{SO_1} k\omega = Mk\omega.$$

Из последних трех выражений видно, что скорость движения изображения всех фотографируемых точек одинакова. С ней и приходится согласовывать скорость передвижения пленки, что у АЩАФА — 2 производится аэросъемщиком механически при помощи синхронизатора.

Выразим скорость движения пленки v_0 через поступательную скорость V центра проекции S по кругу радиуса $r = SM$ и через угловую скорость проектирующего пучка ω.

В выражении (22) для $v_0 = V_0 \frac{f}{SO}$ сделаны замены, имея в виду, что $V_0 = R_0 \omega$, $R_0 = NS_1 + S_1 O = r + H \operatorname{tg} \alpha$, $SO = \frac{H}{\cos \alpha}$, $\omega r = V$. Тогда получим

$$v_0 = \frac{f \cos \alpha}{H} V + \omega f \sin \alpha.$$

Из этого уравнения видно, что первое слагаемое в правой части представляет зависимость скорости движения изображения от поступательной скорости V центра проекции, а второе — от угловой скорости ω.

Радиус ρ цилиндрической картинной поверхности определим, исходя из следующих рассуждений.

Средняя окружность радиуса R_0 сфотографируется на цилиндрической поверхности при помощи луча OS_0 также в виде окружности радиуса ρ в масштабе $\frac{f}{SO}$. Следовательно, $2\pi\rho = \frac{f}{SO} 2\pi R_0$ или $\rho = \frac{f}{SO} R_0$. Но выше было указано, что $SO = \frac{H}{\cos\alpha}$, $R_0 = r + H\operatorname{tg}\alpha = H\operatorname{ctg}\alpha + H\operatorname{tg}\alpha$, поэтому, подставив вместо SO и R_0 эти выражения и сделав преобразования, получим радиус картинной цилиндрической поверхности

$$\rho = \frac{f}{\sin\alpha}.$$

Геометрическое значение радиуса ρ показано на рис. 20 отрезком $Si = f : \sin\alpha$. Для получения ρ нужно продолжить картинное основание до пересечения с горизонтальной плоскостью траектории центра пучка S.

Зная радиус картинной поверхности, легко выразить скорость движения изображения v_0 только через угловую скорость ω, а именно $v_0 = \omega\rho$.

Изложенные в настоящей статье вопросы, относящиеся к теории центрального проектирования плоским световым пучком, основаны на допущении, что движение центра проекции происходит равномерно по горизонтальной прямой, а вращение пучка также совершается с постоянной угловой скоростью вокруг оси, сохраняющей заданное положение в пространстве.

В действительности полет самолета, на котором установлен аэрофотоаппарат, происходит по сложной пространственной линии, поэтому заданные параметры съемки и элементы внешнего ориентирования претерпевают те или иные изменения, т. е. не являются постоянными величинами, как это предполагалось выше при выводе формул и составлении схем.

Существующая съемочная аппаратура не имеет приспособлений, фиксирующих данные для определения элементов внутреннего ориентирования и, следовательно, такие вопросы, например, как нанесение координатных осей на панораму, приходится решать косвенным путем.

Все это вместо взятое приводит к заключению, что для измерительных целей аэрофотопанорамы могут быть использова-

ны только как материал первого приближения. Вместе с тем возникает вопрос о необходимости усовершенствования аппаратуры и о целесообразности дальнейших исследований в области теории панорамной щелевой аэрофотосъемки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ф. А. Коршак.** Маршрутная щелевая аэрофотосъемка и ее геометрические основы. „Труды ВИТУ ВМФ". Выпуск 42, Ленинград, 1957.
2. **Ф. А. Коршак.** Искажения на щелевых аэроснимках, происходящие от изменения заданных элементов ориентирования. „Труды ВИТУ ВМФ". Выпуск 42, Ленинград, 1957.
3. **Ф. А. Коршак.** Наземная щелевая фотограмметрическая съемка. „Ученые записки ДГУ". Том VII. 1961.
4. **Б. И. Брустин.** С. С. Гилёв, В. С. Семенов, Ю. К. Юцевич. Аэрофотооборудование самолетов. Л. 1948.

ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА

1961 УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМ X

Ф. А. Коршак

ФОТОГРАММЕТРИЧЕСКИЕ РАБОТЫ, СВЯЗАННЫЕ С ИЗУЧЕНИЕМ ЛЕДОВОГО РЕЖИМА ВОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Введение

В тех случаях, когда нужно определить геометрические элементы ледового режима рек, морей и других водных пространств, не доступных для непосредственных измерений, целесообразно воспользоваться фотограмметрическими методами.

Элементы ледового режима, подлежащие исследованию, могут представлять чисто научный интерес, обогащая ту или иную часть гидрологии натурными объективными данными [1]. С другой стороны, заниматься изучением ледового режима заставляют и практические нужды, связанные, например, с проектированием, возведением и эксплуатацией гидротехнических сооружений [2, 3], с выяснением ледовой обстановки для составления соответствующих прогнозов и карт, являющихся основанием при выборе трассы судов, плавающих в замерзающих морях.

Как известно, метрическую характеристику того или иного объекта можно получить в результате измерения фотографического изображения его. Только по одному снимку фотограмметрическими методами определяют плоские прямоугольные или полярные координаты точек, очертание плоских предметов, т. е. контуры их, площади фигур, ограниченных теми или иными контурами. При соответствующей организации работ представляется возможным определить скорость поступательного движения отдельных точек и тел.

Таким образом можно получить ответы на вопросы о форме и структуре ледяных полей, о наличии тех или иных образований на льду, о взаимном расположении отдельных льдин,

их площади и скорости движения. Если понадобится, то при помощи снимка на план можно нанести береговую линию водного пространства, контуры островов, определить скорость течения и направление струй по поплавкам и т. п.

Высотные элементы по одному снимку с достаточной точностью можно получить только для таких крупных образований, как торосы и айсберги при наличии на них ярко выраженных вертикальных поверхностей.

С точки зрения теории метода совершенно безразлично, откуда, будет произведено фотографирование: с берега, с неподвижного или плывущего судна, с самолета и т. п. Во всех этих случаях съёмка организуется так, как будто она произведена из какой-то одной точки пространства, положение которой (координаты) необходимо знать или уметь определить.

Теория и основанная на ней практика использования перспективных фотограмметрических снимков недостаточно отражена в имеющейся литературе, что привело к мысли о подготовке и опубликовании настоящей статьи. Изложенные ниже теоретические соображения и практические приемы были использованы автором в двух случаях. Во-первых, при организации экспедиции, которая должна была заниматься определением площади льдин и их скорости во время весеннего паводка для выяснения динамического воздействия льда на мостовые опоры. Данные о толщине льда и его плотности, необходимые для вычисления объёма отдельных льдин и их массы, предполагалось получать в результате натурных измерений, В интересах взаимоконтроля сила удара определялась по специальным приборам, установленным на исследуемой опоре.

Во-вторых, в составе одной экспедиции автором была произведена фотограмметрическая съемка с движущегося ледокола, по результатом которой удалось получить вблизи его трассы торосистость и степень разрушенности льда, форму и размеры полыней и разводий, деформацию льда, вызываемую движением ледокола, элементы канала во льду, проложенного ледоколом и пр.

В нижеследующих параграфах кратко изложена теоретическая сущность фотограмметрического метода, дано описание полевых фотограмметрических приборов и обоснование выбора их, сделаны указания по выполнению съёмочных и камеральных работ. Отдельный параграф посвящен использованию фотограмметрических камер для определения скорости движения льдин.

2. Теория фотограмметрической съёмки.

Теоретическая основа фотограмметрии — метод центрального проектирования - разработана задолго до изобретения фотографии. Первый обстоятельный труд по фотограмметрии опубликован Р. Ю. Тиле сперва в журнале в 1897 году, а

позднее в виде трехтомной монографии [4]. Сам Р. Ю. Тиле был лично связан со всеми деятелями в области фотограмметрии как русскими, так и зарубежными, что позволило ему создать труд, полностью отразивший состояние этой науки на уровне того времени.

Один из основоположников советской научной фотограмметрии является член-корреспондент Академии наук СССР Н. Г. Келль, опубликовавший в 1937 году капитальный труд по фотограмметрии [5]. Выдающийся теоретик и создатель многих отечественных фотограмметрических приборов профессор Ф. В. Дробышев внёс огромный вклад в развитие этой науки и ее практическое приложение [6]. Ряд других советских ученых своими научными трудами или конструкторскими талантами способствовали развитию и совершенствованию советской фотограмметрии и ее применению для разных случаев практики.

Геометрическая схема образования центральной проекции представлена на рис. 1, на котором показаны: предметная плоскость T, центр проекции S, картинная плоскость, или картина, K и проектирующие лучи ASa, BSb и др.

В предметной плоскости расположен объект, изображение которого нужно получить на картине. В качестве предметной

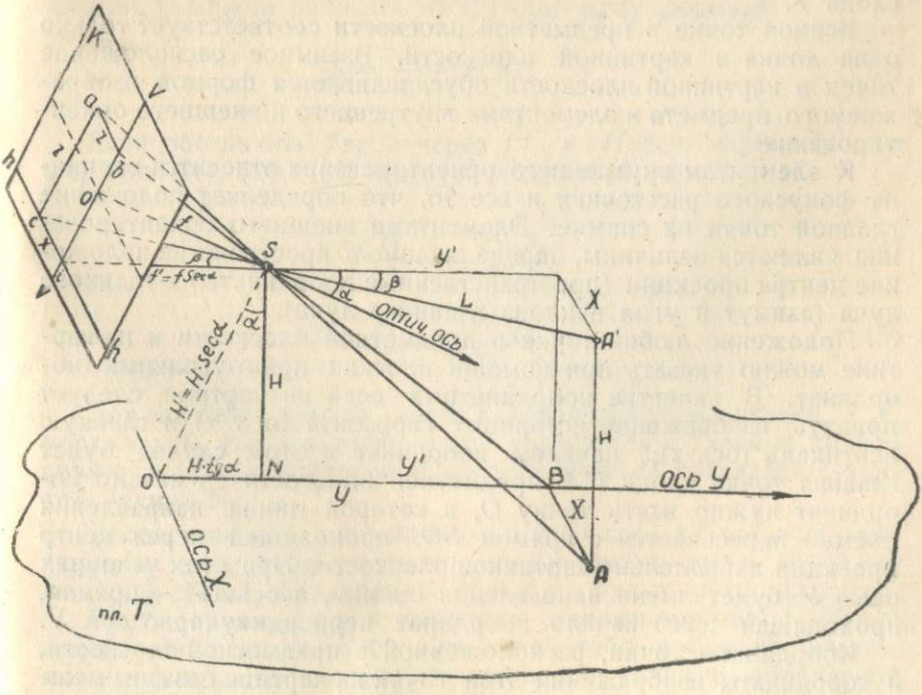


Рис. 1.

плоскости может служить горизонтальная поверхность водного пространства в спокойном состоянии.

Картина или ее продолжение пересекается с предметной плоскостью под любым углом. В частном случае этот угол может равняться 90° или 0°. Основание перпендикуляра, опущенного из центра проекции на картину, называется главной точкой (точка *o*), а длина этого перпендикуляра — фокусным расстоянием. Основание перпендикуляра, опущенного из центра проекции на предметную плоскость, называется точкой надира (точка *N*), а длина *SN* — высотой съёмки

Проектирующие лучи идут от фотографируемых точек через центр проекции и при пересечении с картиной дают изображение, или проекции этих точек. Главный луч, или оптическая ось, проходит через главную точку *o*. Плоскость, содержащая центр проекции, точку надира, и главную точку снимка, пересекает картину по главной вертикали (линия vv), а предметную плоскость — по линии направления съёмки (*OB*). Горизонтальная плоскость, проходящая через центр проекции, пересекает картину по линии действительного горизонта *hh*. Видимый горизонт изобразится ниже, т. е. ближе к точке *o*, из-за влияния кривизны Земли и рефракции световых лучей. Линия горизонта и главная вертикаль пересекаются в главной точке схода *i*.

Всякой точке в предметной плоскости соответствует только одна точка в картинной плоскости. Взаимное расположение точек в картинной плоскости обуславливается формой изображаемого предмета и элементами внутреннего и внешнего ориентирования.

К элементам внутреннего ориентирования относится величина фокусного расстояния и все то, что определяет положение главной точки на снимке. Элементами внешнего ориентирования являются величины, определяющие в пространстве положение центра проекции (пространственные координаты) и главного луча (азимут и угол наклона главного луча).

Положение любой точки в предметной плоскости и на картине можно указать при помощи плоских прямоугольных координат. В качестве координатных осей на картине следует принять изображение истинного горизонта (ось *x*) и главную вертикаль (ось z); началом координат в этом случае будет главная точка схода *i*. В предметной плоскости за начало координат нужно взять точку *O*, в которой линия направления съёмки пересекается с прямой *SO*, проходящей через центр проекции параллельно картинной плоскости. При этих условиях осью *У* будет линия направления съёмки, а осью *X* – прямая, проходящая через начало координат перпендикулярно оси *У*.

Координаты точки, расположенной в предметной плоскости, и координаты изображения этой точки на картине связаны между собою и с элементами ориентирования простой зависимостью,

которую легко установить, воспользовавшись рис. 1. Пусть координатами некоторой точки A в предметной плоскости являются отрезки $AB = X$ и $OB = У$, а координатами изображения этой точки на картине будут отрезки $ab = x$ и $ac = z$. Если обозначить через α — угол наклона главного луча, через H— высоту съёмки, а через f—фокусное расстояние, то из подобия треугольников OSB и ibS можно написать пропорцию $OB : iS = OS : ib$ и или $У : f\sec\alpha = H\sec\alpha : z$, откуда

$$У = \frac{H\sec\alpha}{z} f\sec\alpha. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников ABS и abS можно написать пропорцию $AB : ab = BS : bS$; из подобия же рассмотренных выше треугольников OSB и ibS следует, что $BS : bS = У : f\sec\alpha = H\sec\alpha : z$, поэтому $X : x = У : f\sec\alpha = H\sec\alpha : z$, откуда X можно получить по одной из нижеследующих формул

$$X = \frac{У}{f\sec\alpha} x \text{ или } X = \frac{H\sec\alpha}{z} x. \qquad (2)$$

Для У можно написать из (2) еще одну формулу

$$У = \frac{X}{x} f\sec\alpha. \qquad (3)$$

Если обозначить $f\sec\alpha$ через f^1, а $H\sec\alpha$ через H^1, то формулы (1), (2) и (3) примут следующий вид

$$У = \frac{H^1}{z} f^1 = \frac{X}{x} f^1, \qquad (4)$$

$$X = \frac{У}{f^1} x = \frac{H^1}{z} x. \qquad (5)$$

Для частного случая, когда главный луч горизонтален, т. е. когда $\alpha = 0$, главная точка схода совместится с главной точкой снимка o, а в предметной плоскости точка O совпадает с точкой надира N.

Вследствие того, что при $\alpha = 0$ $\sec\alpha = 1$, а $f^1 = f$ и $H^1 = H$, формулы для этого частного случая будут иметь такой же вид, как (4) и (5), только H и f не будут иметь индексов.

Таким образом, зная элементы ориентирования f, H, α и измерив координаты x и y для какой-либо точки на снимке, можно вычислить координаты этой же точки в предметной плоскости по формулам (4) и (5).

3. Съёмочная аппаратура.

Образование центральной проекции (получение фотоснимка) производится фотографической камерой специального устройства, у которой центр объектива является центром проекции, а матовое стекло или плоскость прикладной рамки, к которой прижимается матовое стекло, — картиной. Для определения положения главной точки прикладная рамка имеет координатные метки, которые получаются на снимке в виде четырех зубцов или четырех точек, расположенных по краям снимка. Соединяя противолежащие метки, получают две линии, в пересечении которых лежит главная точка снимка. При горизонтальном положении оптической оси одна из координатных линий становится линией истинного горизонта, а другая — главной вертикалью. В случае наклона оптической оси на угол α положение главной вертикали, или оси z, останется без изменений, линия же горизонта, принимаемая за ось x, будет отстоять от главной точки на расстоянии

$$z_0 = oi = f \operatorname{tg} \alpha, \qquad (6)$$

располагаясь перпендикулярно главной вертикали.

Фотограмметрические камеры имеют жесткий корпус, что обеспечивает неизменность положения картинной плоскости относительно объектива.

Для получения четких изображений и сохранения постоянства фокусного расстояния фотопластинка или фотопленка в момент съёмки прижимается к прикладной рамке специальным приспособлением. У современных камер на прикладной рамке имеется трафарет, при помощи которого на каждом снимке фотографируется число, равное фокусному расстоянию камеры. Иногда имеются трафареты, обозначающие порядковый номер снимка и угол наклона оптической оси. В некоторых конструкциях камера соединяется с теодолитом и при его помощи устанавливается определенным образом относительно координатных линий на местности. Такие приборы называют фототеодолитами. Вместо теодолита может быть специальное ориентирующее приспособление, называемое автоколлиматором.

Для ледовой фотограмметрической съёмки с берега или с корабля можно использовать аппаратуру, сконструированную для наземных съёмок. Так как обычно такие камеры не имеют затворов, а при съёмке движущихся предметов приходится давать короткую выдержку, исчисляемую долями секунды, то на объектив нужно поставить быстродействующий затвор. При съёмке с самолета пользуются перспективными аэрофотоаппаратами с применением пластинок или плёнки. В настоящее время известно много типов фотограмметрических камер. Обычно используют те, которые имеются под руками или которые удается достать. Ниже приведены краткие сведения о приборах,

которые можно рекомендовать для береговых или корабельных ледовых съёмок.

Фототеодолит „Геодезия" имеет фокусное расстояние 190 *мм*, размер снимка 13 и 18 *см*, светосила 1 : 8, затвор двухлепестковый, съёмку можно производить при горизонтальном положении оптической оси. На рис. 2 отмечены некоторые детали этого прибора: *1* — корпус, *2* — подъемный винт, *3* — уровни, *4* — ориентирующая труба, *5* и *6* — зажимной и микрометренный винты трубы и фотокамеры.

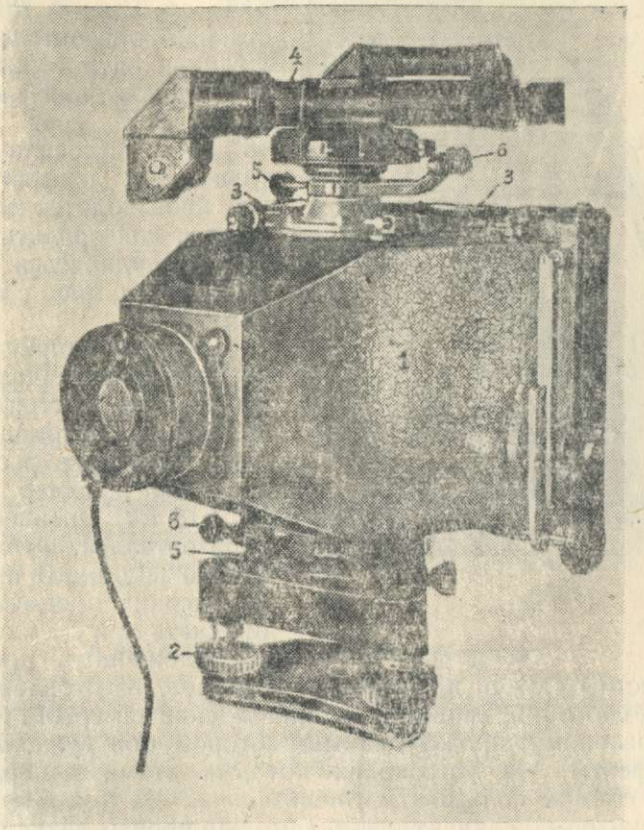


Рис. 2.

Камеры ВА — 1 сконструированы для фотосъёмок морского волнения. Они имеют затворы типа „жалюзи", дающие выдержку от 1/75 до 1/200 *сек*. Размер снимка 13×18 *см*, фокусное расстояние камер 210 *мм*. Светосила объектива 1 : 4,5. Фотосъёмку можно производить только при горизонтальном поло-

жении оптической оси. Подробности об устройстве и применении этих приборов можно найти в „Руководстве по стереофотограмметрической съёмке волн“ [7].

Фотограмметрическое оборудование типа С—5, изготовляемое народным предприятием Цейсса в ГДР, содержит две камеры: одну с фокусным расстоянием 160 *мм*, другую — 250 *мм*. Одна из камер этого типа представлена на рис. 3. Размер снимка 13 × × 18 *см*. Съёмку можно вести при горизонтальном положении оптической оси и с наклоном вниз и вверх на 10 и 21 град (9°0′ и 18° 54′). Светосила объектива 1 : 9, диафрагмирование производится до 1 : 25. Камера для ориентирования может соединяться либо с теодолитом, либо с автоколлиматором.

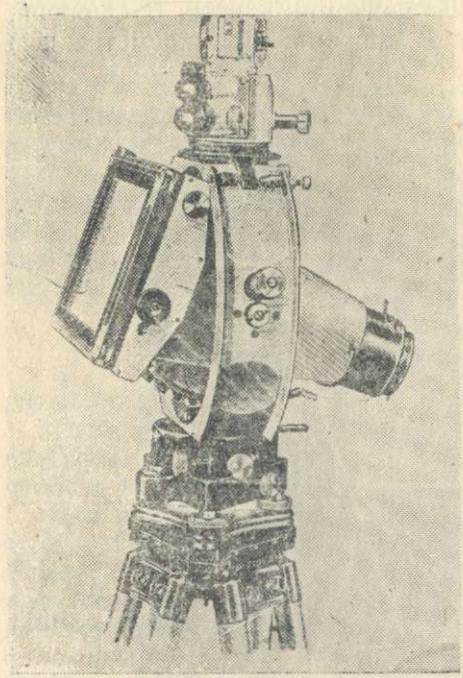


Рис. 3.

То же предприятие выпускает фототеодолиты типа 19/1318, состоящие из камеры с автоколлиматором. Фокусное расстояние 190 *мм*, размер снимка 13 × 18 *см*. Оптическая ось горизонтальна, но объектив можно поднимать при съёмке высоких предметов или опускать при съёмке низкорасположенных предметов.

Известны случаи применения приборов, изготовленных кустарным способом, например, ленинградские камеры ГГИ и ЛГУ. Исследованиями, произведенными автором, обнаружены серьезные дефекты, без устранения которых этими камерами для точных съёмок пользоваться нельзя.

В некоторых случаях съёмку можно производить обычными фотоаппаратами, сделав в них приспособление, позволяющее определить фокусное расстояние и другие элементы ориентирования и сохранить эти элементы неизменными в процессе съёмки.

При возможности выбора камеры следует отдавать предпочтение той, которая допускает съёмку с наклоном оптической оси и имеет большое фокусное расстояние, ибо в этом случае масштаб снимка будет крупнее при прочих равных условиях.

У всякой фотокамеры картинная плоскость ограничена размерами снимка, следовательно, на ней можно изобразить только определенную часть предметной плоскости. Границы этой части предметной плоскости имеют форму трапеции, короткое основание которой — AB расположено ближе к камере, перпендикулярно оси $У$ и определяет собою начало участка съёмки (рис. 4). Точки в предметной плоскости и соответствующие им точки в картинной плоскости обозначены на рис. 4 одинаковыми буквами.

При фотограмметрических работах приходится определять расстояние до начала участка съёмки $R = NE$ и короткое основание трапеции AB. То и другое при заданных f и α меняется только от изменения H и может быть вычислено по нижеследующим формулам

$$R = \frac{f \sec^2 \alpha - z_0 \operatorname{tg} \alpha}{z_0} H, \tag{7}$$

$$AB = \frac{x_0 \sec \alpha}{z_0} H, \tag{8}$$

которые легко выводятся из (1) и (2). В формулах (7) и (8) приняты следующие обозначения: R — расстояние от точки надира N до начала участка съёмки AB, z_0 — наибольшая ордината на снимке, равная сумме двух величин $f \operatorname{tg} \alpha$ и половины размера снимка вдоль главной вертикали, x_0 — размер снимка вдоль линии горизонта. В качестве примера по формулам (6), (7) и (8) для фотокамеры С — 5 с $f = 250$ *мм* при $\alpha = 21^g = 18° 54'$, $H = 10$ *м* и $x_0 = 18$ *см* вычислено $z_0 = 150{,}6$ *мм* $R = 15{,}1$ *м*, $AB = 12{,}6$ *м*.

4. Выполнение съемочных работ.

Организация и выполнение ледовых съёмок зависит от поставленной цели и от имеющегося оборудования.

Фотограмметрической съёмке предшествуют подготовительные операции, к которым относится поверка приборов, пробная съёмка для проверки рассчитанной выдержки и качества фотоматериалов, оборудование фотолаборатории, зарядка кассет, выбор места для установки фотокамеры, определение элементов внешнего ориентирования.

Из поверок фототеодолита следует обратить внимание лишь на соблюдение перпендикулярности оси уровня к вертикальной оси инструмента. Остальные поверки инструмента и определение элементов внутреннего ориентирования производятся лабораторным путем.

Выбирая на берегу место для установки инструмента, следует позаботиться о том, чтобы нужный участок не оказался за пределами снимка. По формуле (7) можно определить минимальное расстояние инструмента от начала участка съёмки при заданной высоте фотографирования. Определив минимальное расстояние, нужно проверить по формуле (8), поместится ли на снимке ближайшая граница участка, в противном случае инструмент нужно установить дальше. Чрезмерное удаление инструмента от фотографируемого участка невыгодно, так как оно сказывается на уменьшении масштаба снимка.

Прямые лучи солнца не должны попадать в объектив фотокамеры, поэтому для возможности производить съёмку в любое время дня, нужно подготовить две станции, используя ту, которая в момент съёмки окажется наиболее удобной по условиям освещения. На выбранной станции фототеодолит нивелируется по уровню при помощи подъёмных винтов.

Камера ориентируется с таким расчетом, чтобы на снимок попал нужный участок водной поверхности. Этого можно достигнуть поворотом камеры вокруг вертикальной оси до появления на матовом стекле изображения соответствующего участка, после чего поворот следует прекратить, камеру закрепить зажимным винтом, а трубу теодолита навести на хорошо видимый ориентир и сделать отсчет по лимбу. В том случае, когда вместо теодолита камера снабжена автоколлиматором, последний нужно установить так, чтобы штрихи, видимые в поле зрения трубы, совпадали друг с другом, после чего выставляется вешка по направлению визирной оси зрительной трубы автоколлиматора.

При ориентировании камеры нужно следить за тем, чтобы координатные метки проектировались на светлый фон, иначе их трудно будет отыскивать на снимке.

После установки камеры производится фотосъёмкка с соблюдением следующего порядка: сперва нужно отодвинуть матовое стекло от прикладной рамки, вынуть его, вложить кассету, установить нужную скорость затвора и очередной номер снимка, вынуть шторку, прижать кассету с пластинкой к прикладной рамке. Затем нужно проверить неизменность установки по уровням, а также сохранение ориентирования и по сигналу лица, наблюдающего за объектами съёмки, произвести экспонирование. После этого нужно отодвинуть кассету от прикладной рамки, закрыть шторку, вынуть кассету и сделать запись в журнал. В журнал записывают: номер снимка, дату, часы и минуты съёмки, чувствительность фотопластинки, диафрагмирование, фильтр, выдержку, условия освещения, элементы внешнего ориентирования. Весьма важно, чтобы изложенная последовательность операций строго соблюдалась в процессе съёмки. Отклонения от этого порядка вызывают брак в работе.

Съёмку следует производить на контрастных фотопластинках

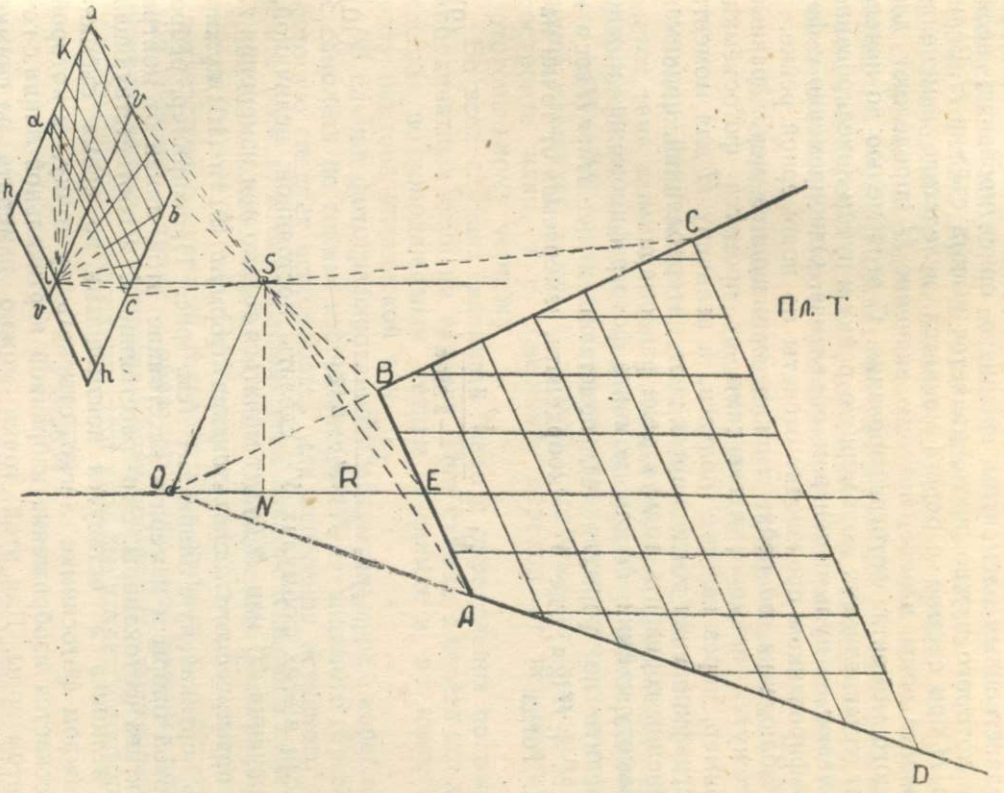


Рис. 4.

высокой чувствительности. Выдержка рассчитывается по общим правилам фотографии с учетом предупреждения смаза изображения при съемке подвижных объектов.

Если фотографирование производится только с целью определения геометрической формы контуров или их площади, то единственным элементом внешнего ориентирования, величину которого нужно знать, является высота съёмки H. Величина H при съёмке с берега меняется, вследствие изменения горизонта воды в реке, поэтому значение H определяют для каждого момента фотографирования. С этой целью до начала работ устанавливают водомерную рейку и путем нивелирования связывают ее нуль с центром объектива. Одновременно с фотографированием производят отсчеты по водомерной рейке.

Наблюдения по рейке можно производить через равные промежутки времени, независимо от процесса фотосъёмки, например, через каждые полчаса, а величину H для момента фотографирования тогда определяют интерполяцией, принимая изменения горизонта воды в реке равномерным.

Высоту съёмки H для момента фотографирования можно вычислить по формуле (4), подставив в нее $H^1 = H\sec\alpha$ и $Y = Y^1 + H\operatorname{tg}\alpha$, где Y^1 — координата, измеряемая от точки надира. Тогда

$$H^1 = \frac{Y^1 z}{f^1 - z\sin\alpha}, \tag{9}$$

а

$$H = \frac{Y^1 z}{f\sec\alpha - z\operatorname{tg}\alpha}. \tag{10}$$

Если в этих формулах Y^1 сделать постоянной величиной, то значения H^1 или H будут меняться только при изменении z. Для практического использования формул (9) и (10) нужно взять вертикальную линию AA^1 (см. рис. 1), например, ребро мостовой опоры и измерить расстояние этой линии от центра объектива фотокамеры. Это расстояние L и соответствующая ему величина Y^1 останутся неизменными во время съёмки. На каждом фотоснимке легко отыскать ту точку, в которой пересекается изображение избранной вертикальной линии с горизонтом воды. Для этой точки можно измерить на снимке абсциссу x и ординату z.

По абсциссе x вычисляют угол β, образованный линией A^1S с осью Y, применив формулу $\operatorname{tg}\beta = \frac{x}{f^1}$. Угол β нужен для вычисления Y^1 по формуле $Y^1 = L\cos\beta$. Числовое значение ординаты z нужно подставить в формулу (9) или (10) для опре-

деления H^1 или H. В случае определения высоты съёмки косвенным путем по формуле (10) отпадает надобность в установке водомерной рейки.

При съёмке с корабля фототеодолит устанавливается на верхней палубе, измеряется высота H над ватерлинией и в дальнейшем вводятся поправки, в зависимости от изменения осадки корабля. При съёмке с самолета высота фотографирования определяется по аэронавигационным приборам. Применение современных радиовысотомеров может обеспечить точность порядка 1—3 *м*. В остальном работы ведут по правилам перспективной аэрофотосъёмки, следя за тем, чтобы камера была ориентирована для фотографирования нужных объектов.

5. Определение площадей и построение плана по перспективным снимкам.

Содержание операций по использованию снимков обуславливается теми задачами, для решения которых произведено фотографирование. Снимок можно использовать непосредственно для получения конечных результатов, например, для определения площадей льдин. С другой стороны, по снимку можно построить план, т. е. совершить переход от перспективы к ортогональному чертежу.

Во всех случаях начинать надо с определения положения координатных осей на картине. При съёмке с берега это легко сделать по координатным меткам на снимке и по известному углу наклона оптической оси.

В случае фотографирования в открытом море с корабля или с самолёта на снимке изображается линия видимого горизонта, которую следует использовать для нанесения истинного горизонта (оси x) и определения угла наклона главного луча α.

Предположим, что из точки S произведено фотографирование на высоте H (рис. 5). Между лучами Sm и Si, рисующими соответственно видимый горизонт M в точке m и действительный горизонт в точке i, образуется так называемый угол понижения видимого горизонта δ, зависящий от H — высоты точки S, радиуса Земли и рефракции. Этот угол вычисляется по формуле

$$\delta' = \sqrt{3{,}28\,H}, \qquad (11)$$

в которой 3,28 — коэффициент, учитывающий влияние кривизны Земли и явление рефракции световых лучей, H — высота центра проекции, выраженная в метрах. При этих условиях значение угла δ получается в минутах.

Главную точку o можно нанести на снимок при помощи координатных меток. Отрезок $oi = z_0$, определяющий положение главной точки схода i, проходит через o перпендикулярно

линии видимого горизонта; длину его вычисляют из элементов треугольника $i o S$ по формуле

$$z_0 = f \operatorname{tg} \alpha, \qquad (12)$$

в которой $\alpha = \delta + \beta$, а $\beta = \operatorname{arctg} \frac{om}{f}$.

Если высота H не превосходит 10 *м*, то $\delta < 6'$, а $mi < 0{,}4$ *мм*. В таких случаях можно считать, что точки m и i практически совпадают, а $\alpha = \beta$.

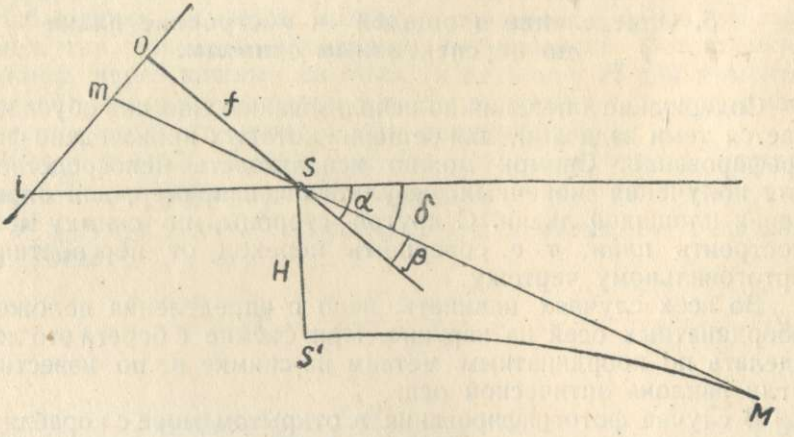


Рис. 5.

Непосредственно по фотоснимку площадь льдин легко получить простым геометрическим способом, используя перспективную сетку, образованную прямыми, расположенными в предметной плоскости параллельно и перпендикулярно линии направления съёмки, принятой за ось *У*.

Как известно из свойств центральной проекции, прямые, параллельные линии направления съёмки, изображаются на снимке линиями, проходящими через главную точку схода, а прямые, перпендикулярные линии направления съёмки, представляются прямыми, параллельными линии горизонта.

Если в предметной плоскости взять сеть квадратов, состоящую из указанных линий, то на снимке она изобразится в виде трапеций (рис. 4 и 6), образуя перспективную сетку. Пусть сторона квадрата равна 2 *м*, тогда площадь каждого квадрата будет равна 4 *кв. м*, следовательно, каждой трапеции на снимке соответствует в предметной плоскости площадь в 4 *кв. м*. Поэтому, если перспективную сетку нанести на снимок, то по

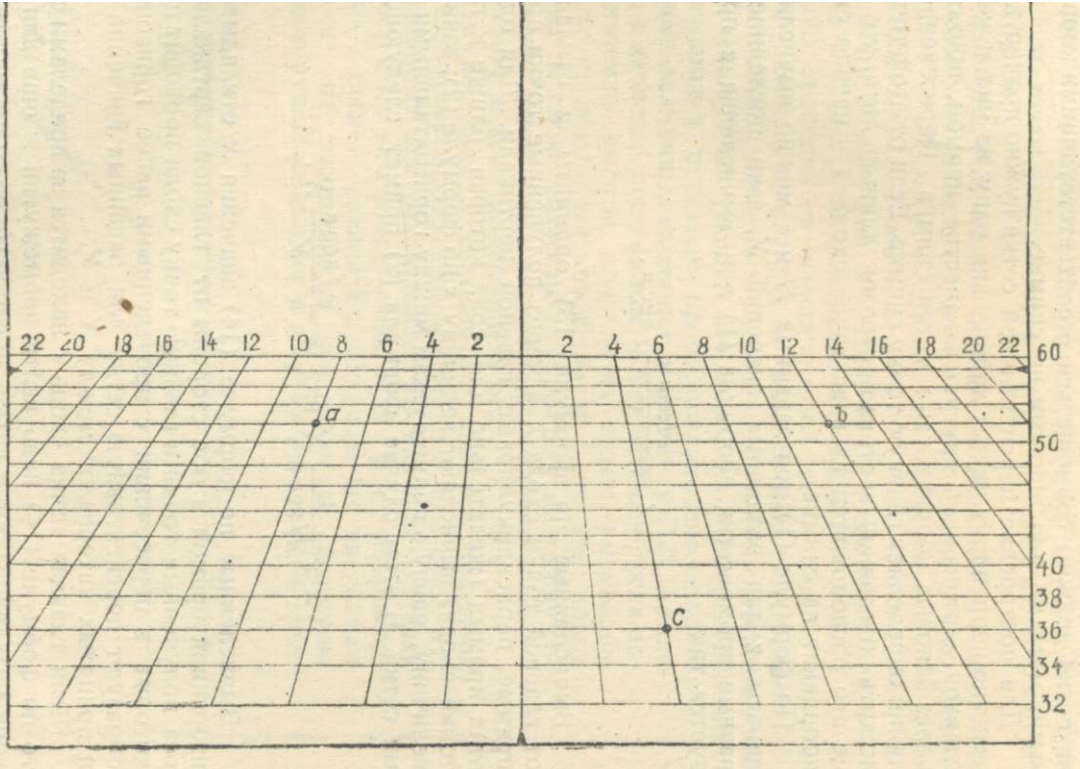

22 20 18 16 14 12 10 8 6 4 2
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22
60
50
40
38
36
34
32
a
b
c

Рис. 6.

количеству трапеций, покрывающих данный контур, легко определить площадь этого контура, зная площадь одной трапеции. Перспективную сетку можно построить на прозрачном материале (стекло, калька, целлулоид) и накладывать на снимок для определения площадей, причем координатные метки на сетке должны совмещаться с соответствующими координатными метками или линиями на снимке.

Для построения перспективной сетки нужно прочертить две взаимно перпендикулярные линии, взяв одну из них в качестве главной вертикали, а другую в качестве прямой, проходящей через боковые координатные метки снимка. Пересечение этих линий определяет главную точку снимка. Если от этой точки отложить по главной вертикали отрезок длиною $f \operatorname{tg} \alpha$, то в конце его расположится главная точка схода i — начало системы координат на снимке.

По формуле (1) при заданных H и α можно вычислить ординаты z для различных значений $У$, взяв последние через равные промежутки. Формула (1) для вычисления z преобразуется так

$$z = \frac{H \sec \alpha}{У} f \sec \alpha . \qquad (13)$$

Вычисленные по формуле (13) ординаты z откладывают от главной точки схода i, а через полученные точки проводят прямые, перпендикулярные главной вертикали. Для одной из этих прямых (желательно для той, которая ближе к главной точке схода) вычисляют величину x по формуле (2), взяв для X величину, равную промежуткам между горизонтальными линиями сетки. В этом случае формула (2) примет следующий вид

$$x = \frac{z}{H \sec \alpha} X \text{ или } x = \frac{f \sec \alpha}{У} X . \qquad (14)$$

Вычисленные по формуле (14) значения x откладывают на избранной прямой в обе стороны от главной вертикали и через полученные точки и главную точку схода проводят прямые, которые в пересечении с проведенными ранее горизонталями образуют перспективную сетку для заданных значений f, α, H и принятых интервалов между X и $У$.

Если главная точка схода i находится за пределами снимка, то по формуле (14) надо найти промежутки x еще для одной горизонтальной линии сетки, после чего легко построить линии, направленные в главную точку.

Перспективная сетка, показанная на рис. 6, построена по следующим данным. Размер снимка 13×18 *см*, $f = 250$ *мм*, $\alpha = 21^g = 18° 54'$ $H = 20$ *м*, интервалы для X и $У$ 2 метра.

Расстояние $f\operatorname{tg}\alpha$ главной точки схода от главной точки снимка получилось 85,6 *мм*. Наибольшая ордината z равна сумме $f\operatorname{tg}\alpha$ и половины снимка вдоль главной вертикали, т. е. 85,6 + 65,0 = 150,6 *мм*. Этой наибольшей ординате соответствует расстояние до начала участка съёмки 37,1 *м*. Дальнейшие вычисления нужно произвести для целых значений не $У$, а $У^1$ — расстояний от точки надира. Разность $У - У^1$ для данного случая равна 6,85 *м*.

По формуле (13) можно определить значения z для разных значений $У^1$, начиная с 32 *м*, через интервалы в 2 *м*. Например, при $У^1 = 32$ *м* ($У = 38{,}85$ *м*) z = 143,8 *мм*; при $У^1 = 34$ *м* ($У = 40{,}85$) z = 136,7 *мм* и т. д.

По формуле (14) для $У = 56{,}85$ *м* (что соответствует $У^1 = 50$ *м*) и $X = 2$ *м* можно найти $x = 9{,}3$ *мм*.

Форма трапеций на перспективной сетке зависит от угла наклона оптической оси α и от высоты фотографирования H. При постоянном значении α форма сетки будет меняться только от изменения H следующим образом. Из формулы (13) видно, что измененне z просходит пропорциально изменению H; остальные величины, входящие в формулу (13), принимаются в качестве постоянных. Следовательно, если новое значение высоты получается путем умножения прежнего на некоторый коэффициент k, то все новые ординаты, а также разность их (промежутки между горизонталями, равные высоте трапеций) будут изменены в соответствии с этим коэффициентом.

Пусть на рис. 7 сплошными линиями показаны трапеции, построенные для некоторого значения H. Уменьшение H в k раз вызывает уменьшение ординат и разностей их на снимке тоже в k раз, например, величина c станет равной kc. Абсциссы же на снимке не зависят от изменения H, что видно из формулы (14), в которую H не входит, а по условию все остальные

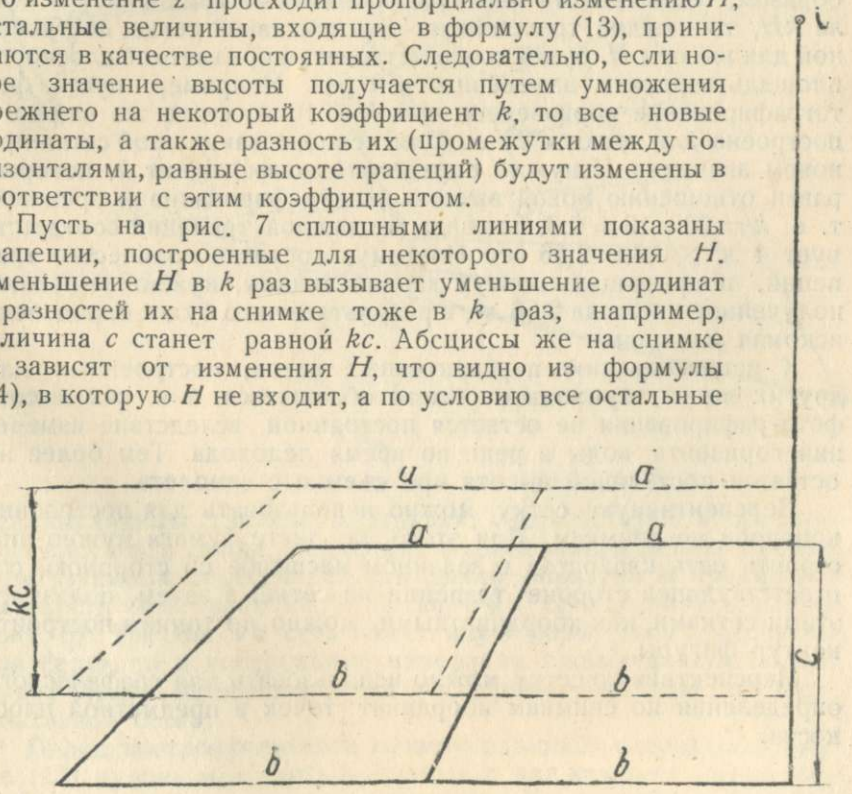


Рис. 7.

величины, кроме H, остаются постоянными. Поэтому основания трапеций, как не зависящие от H и k, останутся неизменными. Вместо трапеций с основаниями a, b и высотой c получатся новые трапеции с основаниями a и b, но уже с высотою kc. На рис. 7 эти новые трапеции изображены штриховыми линиями. Так как площадь каждой трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, то площадь новой трапеции будет в k раз меньше прежней, т. е. эта площадь изменится пропорционально изменению H.

Практически нужно считать целесообразным использование для всех снимков одной сетки, построенной применительно к определенным условиям. В этом случае при изменении высоты H такой сетке будут соответствовать в предметной плоскости квадраты с измененными сторонами, а следовательно и с измененной площадью.

Координаты точек в предметной плоскости, а следовательно и стороны квадратов, как разности координат, будут изменяться пропорционально H, что видно из формул (4) и (5). Таким образом, если высота фотографирования H изменилась и стала kH, то каждой трапеции на перспективной сетке, построенной для высоты H, будет соответствовать в предметной плоскости площадь квадрата, изменённая в k раз. Например, пусть фотографирование произведено при $H = 16$ *м*, сетка же на рис. 6 построена для высоты 20 *м*. Для использования этой сетки при новом значении H нужно определить коэффициент k, который равен отношению новой высоты фотографирования к прежней, т. е. $k = 20 : 16 = 0{,}8$, площадь же каждой трапеции соответствует $4\ м^2 \times 0{,}8 = 2{,}56\ м^2$. Поэтому, сосчитав количество трапеций, покрывающих контур данной льдины, нужно умножить полученное число на 2,56 $м^2$, в результате чего будет определена искомая площадь.

К использованию перспективных сеток, построенных для других высот, приходится часто обращаться, так как высота фотографирования не остается постоянной, вследствие изменения горизонта воды в реке во время ледохода. Тем более не остается постоянной высота при съемке с самолета.

Перспективную сетку можно использовать для построения контуров по снимкам. Для этого на листе бумаги нужно построить сеть квадратов в заданном масштабе со стороною, соответствующей стороне трапеции на сетке, а затем, пользуясь этими сетками, как координатными, можно по точкам построить контур фигуры.

Перспективную сетку можно использовать для графического определения по снимкам координат точек в предметной плоскости.

6. Прямоугольная сетка для определения площадей.

Если понадобится проконтролировать определение площадей отдельных льдин по снимку, то это можно выполнить повторными измерениями при помощи сетки, построенной на основании следующих свойств перспективы. Прямым, расположенным на картине параллельно главной вертикали, соответствуют в предметной плоскости линии, проходящие через главную точку схода предметной плоскости (точка O на рис. 8). Прямым, пер-

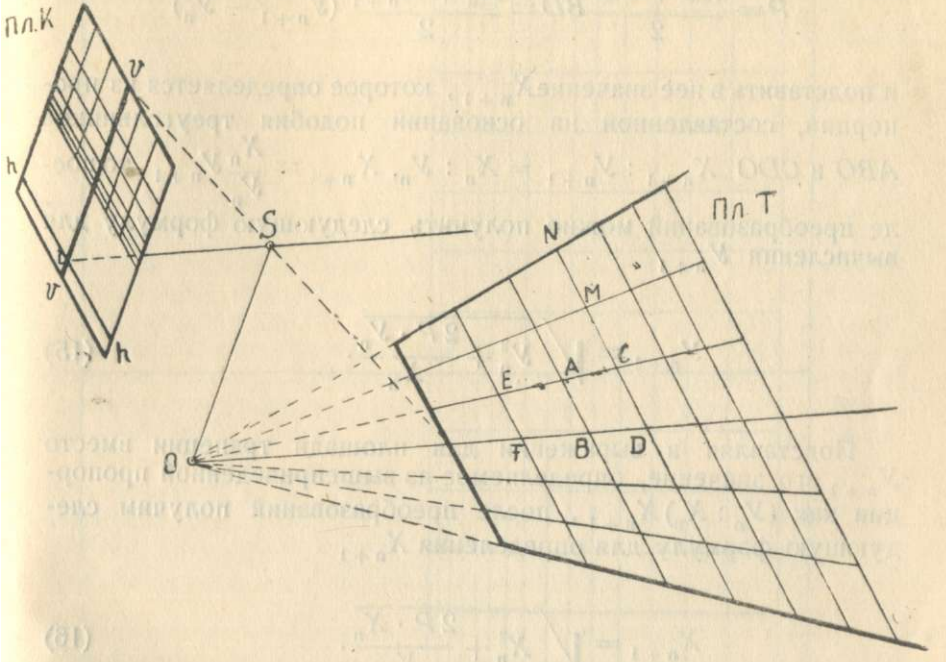


Рис. 8.

пендикулярным главной вертикали, соответствуют в предметной плоскости линии, перпендикулярные направлению съёмки. При взаимном пересечении эти линии образуют в предметной плоскости сеть трапеций, а на картине сеть прямоугольников (рис. 8). Так как эта сеть имеет иную форму, чем перспективная сетка, то и контрольные измерения, произведенные по ней, будут более надежными, чем повторные измерения по перспективной сетке.

Перед построением сети прямоугольников сперва по формуле (13) нужно вычислить ординаты z для каждой горизонтальной линии сетки по заданным значениям Y на местности. Значение же z только для одной линии, например, для AB, можно взять

произвольно, для всех же остальных линий $У$ будет функцией от площади P и основания X.

Допустим, что для некоторой линии AB, являющейся основанием трапеции, избрано значение $У_n = OB$ и $X_n = AB$. Нужно найти второе основание трапеции $CD = X_{n+1}$, и величину $OD = У_{n+1}$, соответствующую искомому основанию CD.

Если написать формулу для площади P трапеции $BACD$

$$P = \frac{AB + CD}{2} BD = \frac{X_n + X_{n+1}}{2} (У_{n+1} - У_n)$$

и подставить в нее значение X_{n+1}, которое определяется из пропорции, составленной на основании подобия треугольников ABO и CDO $X_{n+1} : У_{n+1} = X_n : У_n$, $X_{n+1} = \frac{X_n}{У_n} У_{n+1}$, то после преобразований можно получить следующую формулу для вычисления $У_{n+1}$

$$У_{n+1} = \sqrt{У_n^2 + \frac{2P \cdot У_n}{X_n}}. \qquad (15)$$

Подставляя в выражении для площади трапеции вместо $У_{n+1}$ его значение, определяемое из вышеприведенной пропорции как $(У_n : X_n) X_{n+1}$, после преобразований получим следующую формулу для определения X_{n+1}

$$X_{n+1} = \sqrt{X_n^2 + \frac{2P \cdot X_n}{У_n}}. \qquad (16)$$

Формулы (15) и (16) пригодны для всех линий, лежащих после начальной линии AB. Для линий, лежащих ближе к точке O, чем AB, например для EF, (т. е. для вычисления $OF = У_{n-1}$ и $EF = X_{n-1}$) в формулах (15) и 16) перед вторым членом подкоренного выражения надо брать знак минус.

Для вычисления всех следующих значений $У$ ($У_{n+2}$, $У_{n+3}$, ...) в формулу (15) вместо P нужно ставить $2P$, $3P$ и т. д. Величина оснований трапеций при данном значении $У$ постоянна, т. е. $NM = MC = CD$.

Основание x элементарного прямоугольника на снимке вычисляется по формуле (14). Имея числовые значения x и z, легко построить сеть прямоугольников для определения площадей по фотоснимкам.

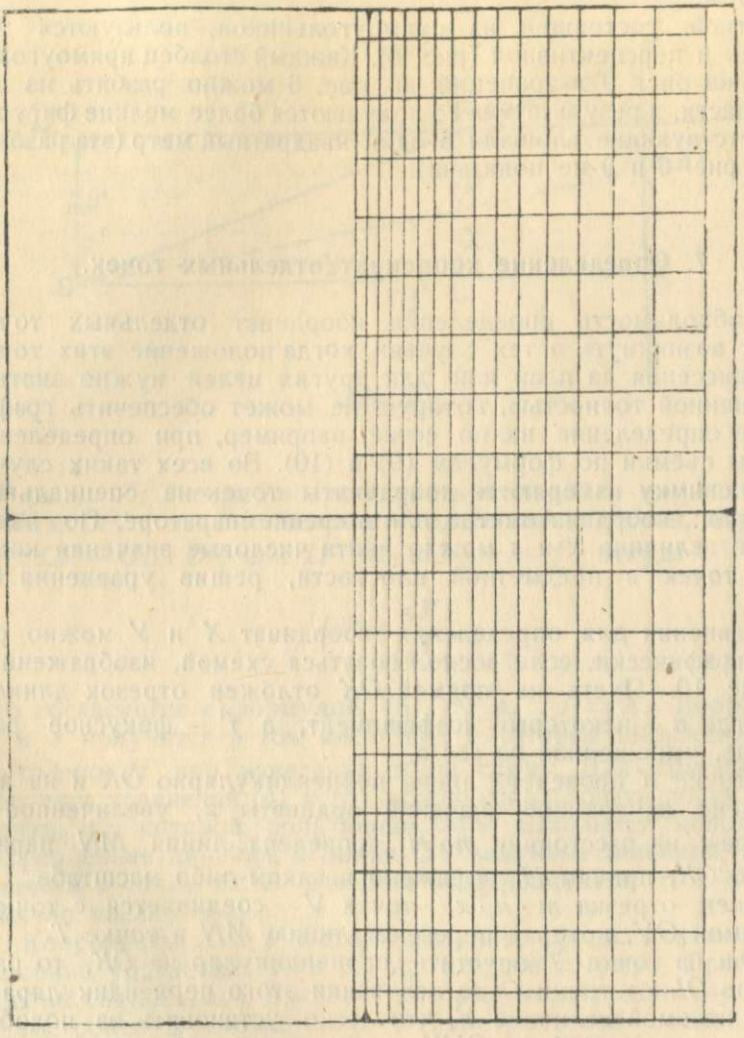


Рис. 9.

На рис. 9 изображена сетка, построенная применительно к следующим данным $f = 250$ *мм*, $\alpha = 21^g = 18° 54'$, $H = 20$ *м*, $Y_п = 50$ *м*, $X_п = 2$ *м*, $P = 4$ *м*^{2}. Для $Y_п = 50$ *м* получается $Y' = 43{,}15$ *м*, $z = 112{,}0$ *мм*, $X = 2$ *м*, $x = 10{,}57$ *мм*, $Y - Y' = 6{,}85$ *м*.

Сеткой, состоящей из прямоугольников, пользуются так же, как и перспективной (рис. 6). Каждый столбец прямоугольников на рис. 9 и трапеций на рис. 6 можно разбить на четыре части, в результате чего получаются более мелкие фигуры, соответствующие площади в один квадратный метр (эта разбивка на рис. 6 и 9 не показана).

7. Определение координат отдельных точек.

Необходимость определения координат отдельных точек может возникнуть в тех случаях, когда положение этих точек для нанесения на план или для других целей нужно знать с повышенной точностью, которую не может обеспечить графическое определение их по сетке, например, при определении высоты съёмки по формулам (9) и (10). Во всех таких случаях по снимку измеряются координаты точек на специальных приборах: координатометре или стереокомпараторе. По измеренной величине x и z можно найти числовые значения координат точек в предметной плоскости, решив уравнения (4) и (5).

Уравнения для определения координат X и Y можно решить графически, если воспользоваться схемой, изображенной на рис. 10. Пусть на прямой OK отложен отрезок длиною $n \cdot f^1$, где n — некоторый коэффициент, а f^1 — фокусное расстояние, умноженное на sec α.

В точке K проведена линия перпендикулярно OK и на ней отложено измеренное значение ординаты z, увеличенное в $n \cdot m$ раз; на расстоянии $m \cdot H^1$ проведена линия MN параллельно OK, причем H^1 выражено в каком-либо масштабе.

Конец отрезка $m \cdot n \cdot z$ — точка V — соединяется с точкой O прямой OV, которая пересечет линию MN в точке T.

Если из точки T опустить перпендикуляр на OK, то расстояние OL от точки O до основания этого перпендикуляра L равно искомой величине Y, что легко установить из подобия треугольников OTL и OVK, взяв отношение сходственных сторон: $OL : OK = TL : VK$ или $OL : n \cdot f^1 = m \cdot H^1 : m \cdot n \cdot z$, откуда

$$OL = \frac{f^1 \cdot H^1}{z},$$

что приводит к формуле (4), следовательно $OL = У$. Если от точки K отложить отрезок KC, равный измеренному x, увеличенному в n раз, и соединить точку C с O, то прямая OC пересечет TL в точке P. Точка P является изображением на плане той точки, для которой на снимке измерены x и z, т. к.

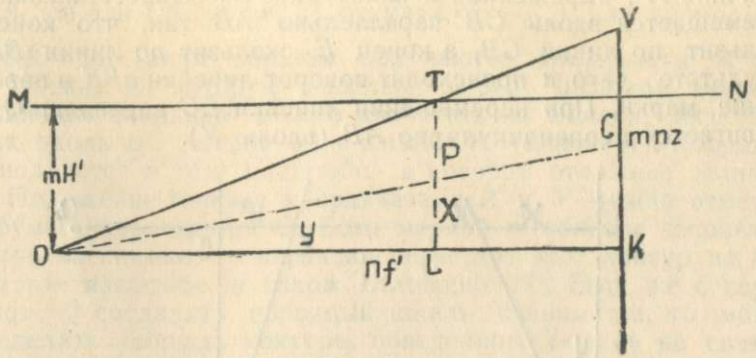


Рис. 10.

LP равно X. Это можно установить из подобия треугольников OCK и OPL, взяв отношение сходственных сторон, а именно $LP : CK = OL : OK$ или $LP : n \cdot x = y : n \cdot f^1$, откуда

$$LP = \frac{xУ}{f^1},$$

что согласуется с формулой (5), т. е. $LP = X$. Координаты X и $У$ получатся в том масштабе, в котором выражена высота съёмки H^1 при нанесении ее на схему. Для графического решения уравнений (4) и (5) можно использовать доску Пульфриха, на которой роль линии MN выполняет неподвижно закрепленная линейка, а линия OV заменена линейкой, вращающейся в точке O. В качестве коэффициентов m и n берут обычно числа 4 и 5.

Координаты X и $У$ можно получить путем механического решения уравнений (4) и (5) на стереоавтографе Дробышева или на специальном приборе, который можно сконструировать и построить в соответствии с геометрической схемой, представленной на рис. 11.

Две линейки, одна из которых изогнута под прямым углом (CBc), могут вращаться в точках A и B. Поворот левой линейки сообщает поступательное движение снимку и карандашу Q вдоль линии горизонта (параллельно AB). При повороте правой линейки перемещается специальная марка по направ-

лению, перпендикулярному линии горизонта и AB. Поворот правой линейки происходит по следующим причинам. Между нулевым положением линейки CB (оно показано штриховыми линиями) и фактическим ее положением BE помещается линейка, на которой может устанавливаться отрезок EC, равный величине H^1, выраженной в каком-либо масштабе. Линейка EC перемещается вдоль CB параллельно AB так, что конец C скользит по линии CB, а конец E скользит по линии BE, в результате чего и происходит поворот линейки eBE и перемещение марки. При перемещении линейки EC карандаш Q передвигается перпендикулярно AB (вдоль $У$).

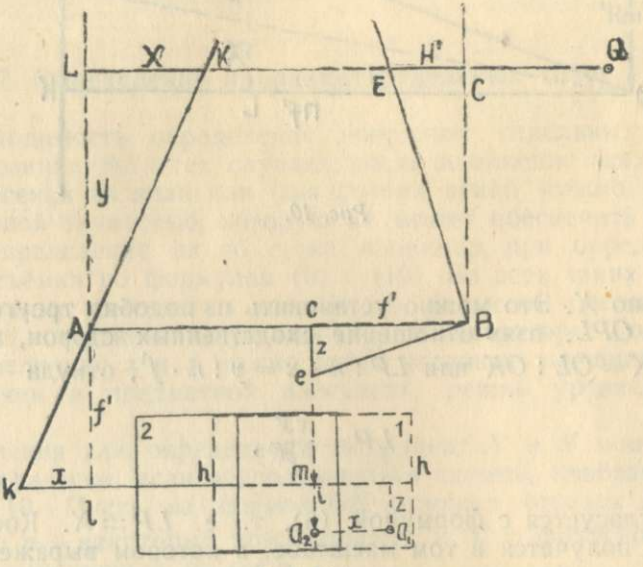


Рис. 11.

В нулевом положении, показанном штриховыми линиями, снимок занимает положение *1*, длинные концы линеек располагаются перпендикулярно AB, так как тогда $EC = 0$, на коротких же концах откладывается f^1; марка m в этом случае находится в главной точке схода i (начало координат снимка), а линия горизонта hh параллельна линии AB. Если на линейке EC установить величину H^1, выразив её в каком-нибудь масштабе, и навести марку на изображение какой-либо точки на снимке например, на точку a, расположение линеек, снимка и марки будет таким, какое показано на рис. 11 сплошными линиями. При этом снимок вместе с точкой a переместится влево на величину абсциссы x этой точки и займет положение 2, сама точка передвинется из a_1 в a_2, а марка опустится вниз от точки i на величину ординаты z.

Из подобия треугольников BCE и bce можно написать пропорцию $CB : cB = CE : ce$ или $CB : f^1 = H^1 : z$, откуда $CB = \frac{H^1}{z} f^1$ или по формуле (4) $CB = У$. Из подобия треугольников ALK и $Alк$ можно написать пропорцию $LK : lк = LA : lA$ или $LK : x = У : f^1$, откуда $LK = \frac{У}{f^1} x$ или по формуле (5) $LK = X$. Таким образом получаются координаты X и $У$ той точки, на которую наведена марка. Числовое значение найденных координат можно прочитать на шкалах, располагаемых вдоль BC (шкала $У$) и вдоль LK (шкала X). Координаты получатся в том масштабе, в котором отложена величина H^1. Положение точки с координатами X и $У$ можно отметить на бумаге карандашом Q. Если маркой m обвести какой-либо контур на снимке, то карандаш вычертит этот контур на плане в том масштабе, в каком отложено H^1. Если же с карандашом Q соединить обводный шпиль планиметра, то можно определить площадь контура, обведенного маркой на снимке.

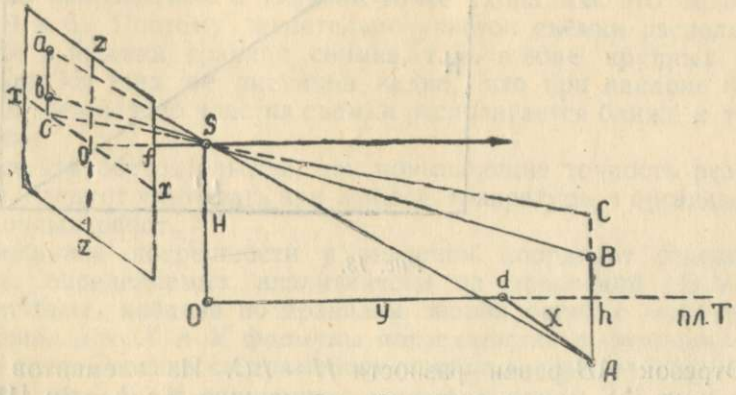


Рис. 12.

Определение высотных элементов по одному снимку ограничено случаями, когда точка B (рис. 12) и ее ортогональная проекция A на предметную плоскость T имеют соответствующие изображения a и b на картине. По рис. 12 можно составить пропорцию $AB : ab = У : f$. Обозначая AB буквой h и заменяя $У : f$ отношением $H : z_a$, где z_a — ордината точки a, измеренная на снимке, получим $h : ab = H : z_a$, откуда

$$h = \frac{H}{z_a} ab . \qquad (17)$$

Если оптическая ось oS, а вместе с ней и снимок наклонены к горизонту, то формулу для определения h можно составить по данным рис. 13, на котором точки A и B показаны расположенными в вертикальной плоскости, проходящей через главный луч oS и, следовательно, через ось $У$. Результат не изменится оттого, что точки A и B будут находиться в другой какой-либо вертикальной плоскости.

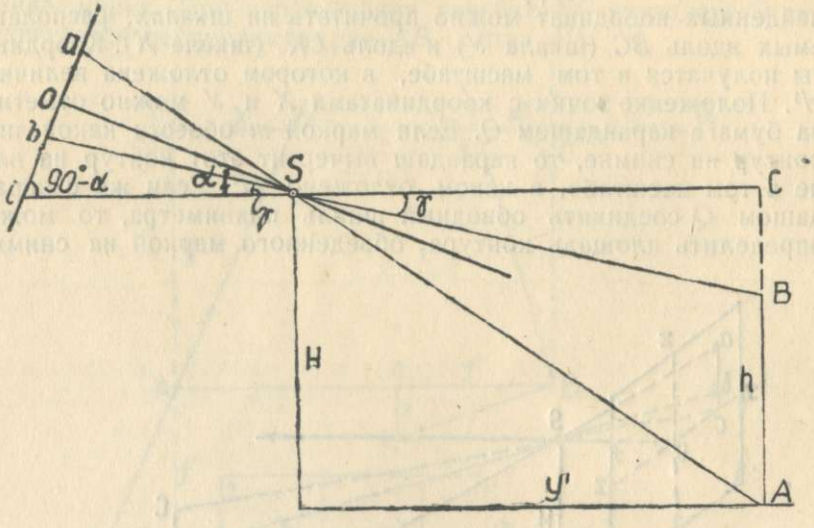


Рис. 13.

Отрезок AB равен разности $H - BC$. Из элементов треугольника ibS можно составить пропорцию $f^1 : ib = \sin [180° - (\gamma + 90° - \alpha)] : \sin \gamma$. После преобразований получим $\frac{f^1}{ib} = \operatorname{ctg} \gamma \cos \alpha + \sin \alpha$, откуда $\operatorname{ctg} \gamma = \frac{f^1 : ib}{\cos \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha$, а

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(f^1 : ib) \sin \alpha - \cos^2 \alpha}.$$

Из прямоугольного треугольника SCB определяем $BC = У^1 \operatorname{tg} \gamma$. Выражение для BC получается довольно громоздким по сравнению с формулой (17), поэтому его имеет смысл применять лишь в единичных случаях. Для определения высотных элементов лучше производить съёмку при горизонтальном положении оптической оси.

8. Точность определения площадей и координат.

Точность конечных результатов фотограмметрической съёмки обуславливается теми погрешностями, которые появились во время полевых и камеральных работ.

Из погрешностей съёмочных работ заслуживает внимания ошибка в определении высоты съёмки H, ибо H входит аргументом во все основные формулы Поверхность водного пространства в действительности не всегда является плоскостью, между тем как во всех предшествовавших рассуждениях речь шла о плоской поверхности. Отклонение водной поверхности реки от плоскости нельзя считать менее $\pm 0{,}1$ *м*, таким образом, погрешность в определенни высоты камеры по отношению к предметной плоскости в дальнейших рассуждениях следует принимать $\pm 0{,}1$ *м*.

Определение площадей по сеткам производится с точностью графических построений. Относительная ошибка в определении площадей возрастает по мере приближения к линии горизонта, что объясняется уменьшением масштаба изображения по направлению к главной точке схода, как это видно на рис. 4 и 6. Поэтому желательно участок съёмки располагать ближе к нижней границе снимка, т. е. в зоне крупных масштабов. Из этих же рисунков видно, что при наклоне оптической оси начало участка съёмки располагается ближе к точке стояния.

Все эти обстоятельства, как повышающие точность результатов, следует учитывать при выборе аппаратуры и организации съёмочных работ.

Величина погрешности в значении координат отдельных точек, определяемых аналитически из уравнений (4) и (5), может быть найдена по правилам теории ошибок измерений, применяя для X и Y формулы погрешностей в функциях общего вида. Средние квадратичные ошибки в определении $Y-m_y$ и в $X-m_x$ могут быть найдены по формулам

$$m_y = \pm \sqrt{\left(\frac{Y}{H^1} m_н\right)^2 + \left(\frac{Y}{f^1} m_f\right)^2 + \left(\frac{Y}{z} m_z\right)^2}, \qquad (18)$$

$$m_x = \pm \sqrt{\left(\frac{X}{H^1} m_н\right)^2 + \left(\frac{Y}{f^1} m_x\right)^2 + \left(\frac{X}{z} m_z\right)^2} \qquad (19)$$

В этих формулах приняты следующие обозначения для средних квадратичных ошибок: m_x и m_z — ошибки в определении координат на снимке, m_f — ошибка в определении фокусного расстояния камеры, $m_н$ — ошибка в определении высоты съёмки.

Определение ошибок в координатах отдельных точек можно иллюстрировать следующими числовыми примерами, Пусть для фотокамеры с $f = 250$ *мм* при $H = 20$ *м*, $\alpha = 21^g = 18°54'$ приняты числовые значения погрешностей в исходных величинах $m_x = 0{,}05$ *мм*, $m_z = 0{,}05$ *мм*, $m_f = 0{,}05$ *мм*, $m_н = 0{,}1$ *м*. Взяв эти величины, можно вычислить погрешности в отстояниях по формуле (18) для различных значений $У^1$. Ошибки m_y можно выразить в абсолютных величинах и в процентах по отношению к отстоянию, т. е. $\frac{m_y}{У}$, в результате чего получится следующая таблица.

У в м.	$\frac{У}{H^1} m_н$	$\frac{У}{f^1} m_f$	$\frac{У}{z} m_z$	m_y в *м*	$\frac{m}{y}$ в %
32	0,18	0,01	0,02	±0,18	0,46
40	0,22	0,01	0,02	±0,22	0,47
50	0,27	0,01	0,03	±0,27	0,47
60	0,32	0,01	0,03	±0,32	0,48

Рассмотрение этой таблицы приводит к следующим выводам. Абсолютная и относительная ошибки возрастают с увеличением $У$. Наибольшее влияние на снижение точности определения $У$ оказывает погрешность в определении высоты $m_н$.

Определение погрешности в вычислении X отдельной точки можно произвести по формуле (19), подставив в нее числовые значения входящих туда величин. Например, при $x = 62{,}1$ *мм* ($X = 16$ *м*) и $z = 83{,}4$ *мм* ($У = 66{,}85$ *м*, $У^1 = 60$*м*) $m_x = \pm\sqrt{0{,}08^2 + 0{,}01^2 + 0{,}03^2} = \pm 0{,}09$ *м*.

Общее же представление о погрешностях в координате X можно составить в результате исследования формулы (19), все члены которой меньше отдельных членов формулы (18). В самом деле, в первом и третьем члене X всегда меньше $У$, а остальные величины одинаковы, следовательно первый и третий член формулы (19) меньше соответствующих членов формулы (18). У второго же члена m_x по условию равно m_f, следовательно, вторые члены будут одинаковыми. Таким образом m_x всегда меньше m_y на данном отстоянии, равно как и относительная ошибка в определении X будет всегда меньше относительной ошибки в $У$. Поэтому при рассмотрении ошибок в определении координат отдельных точек главным критерием является погрешность в определении $У$. Ошибка в определении высоты съёмки H, вычисляемой по формуле (10), может быть найдена следующим образом. Обозначая в этой формуле знаменатель буквой Q, имеем $H = \frac{У^1 z}{Q}$, где $Q = f^1 \sec\alpha - z \operatorname{tg}\alpha$.

По правилам теории ошибок измерений ошибку в определении H можно вычислить по формуле

$$m_н = \pm \sqrt{\left(\frac{y^1}{Q} m_z\right)^2 + \left(\frac{z}{Q} m_y\right)^2 + \left(\frac{H}{Q} m_Q\right)^2}.$$

Здесь m_Q — ошибка в определении знаменателя. Её можно вычислить по формуле

$$m_Q = \sqrt{m_f^2 \sec^2\alpha + m_z^2 \operatorname{tg}^2\alpha},$$

где $\sec\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ рассматриваются как постоянные числовые коэффициенты при заданном наклоне α.

Принимая конкретные числа для случая съёмки камерой типа С — 5 с $f = 250$ *мм*, при $\alpha = 18°54' = 21^g$, $y^1 = 50$ *м*, $\sec\alpha = 1{,}057$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}3424$, $m_f = 0{,}05$ *мм*, $m_z = 0{,}05$ *мм*, $m_y = 0{,}05$ *м*, $z = 98{,}3$ *мм*, $H = 20$ *м* по вышеприведенным формулам получим $m_Q = \pm 0{,}056$ *м*, $Q = 247$ *мм*, $m_н = \pm 0{,}03$ *м*.

Результаты вычислений показывают, что высота съёмки, определяемая аналитическим путем по формуле (10), получается с точностью не ниже той, которую дают непосредственные измерения. Ошибка увеличивается при увеличении расстояния y^1 и при увеличении погрешностей измерения его.

При графическом решении уравнений суммарная ошибка определяется предельной точностью масштаба обработки. В качестве предельной точности принимается величина, соответствующая в данном масштабе отрезку длиною 0,2 *мм*. Например, при масштабе 1 : 500 отрезку в 0,2 *мм* на бумаге соответствует на местности 0,1 *м*. В данном случае 0,1 *м* является предельной точностью масштаба 1 : 500.

Если предельная точность масштаба окажется меньше величины m_y и m_x, вычисленной по формулам (18) и (19) для заданного отстояния, тогда для оценки точности графического решения уравнений нужно брать значения по формуле (18) и (19). Например, для 1 : 500 предельная точность масштаба 0,1 *м*, а в вышеприведенной таблице для фотокамеры С — 5 при отстоянии 60 *м* погрешность, вычисленная аналитически, будет 0,3 *м*; эта последняя и должна приниматься в расчет при оценке точности определения координат отдельных точек графическим путем.

При механическом решении уравнений результаты получаются в графическом виде, поэтому соображения, высказанные по поводу графического решения уравнений, остаются в силе и для механического решения этой задачи. Если числовые значения координат при механическом решении уравнений опре-

деляются по шкалам, то в качестве погрешностей можно принять точность отсчета по соответствующим шкалам, выразив ее в масштабе обработки, если эта точность (ошибка отсчета) будет больше m_y и m_x.

Рассмотрение формул (18) и (19) приводит к мысли о возможности применения для съёмки льдин таких фотокамер, у которых ошибка в определении фокусного расстояния и координат x и z на снимке будет давать второй и третий члены формул (18) и (19), близкие по числовому значению к первому члену. В этом случае устройство фотокамеры и ее эксплуатация оказались бы более простыми. Например, стало бы возможным производить съёмку обыкновенными фотоаппаратами, только пришлось бы позаботиться об определении и сохранении неизменными во время съемки элементов внутреннего и внешнего ориентирования, что несомненно потребует некоторых дополнительных приспособлений к камерам этого типа.

9. Определение скорости движения льдин при помощи фотограмметрических камер.

Скорость движения льдин является одним из элементов, необходимых для различных расчетов, связанных с изучением ледового режима, например, для определения динамического действия льда на мостовые опоры. Из механики известно, что для определения скорости движения какой-либо точки нужно знать время, за которое эта точка прошла определенный путь. Если путь будет коротким, то определение скорости обычными способами при помощи створов становится ненадёжным, а иногда и просто невозможным, так как расстояние между створами, разбиваемыми для этой цели, приходится брать небольшим, а при большом удалении льдины от берега наблюдение момента прохождения её через створ становится затруднительным.

В самом деле, во время ледохода поверхность реки покрыта множеством однообразных льдин и наблюдение движения одной какой-либо льдины между створами чрезвычайно затрудняется.

Для определения скорости движения льдины можно воспользоваться фотокамерой, на матовом стекле которой нужно нанести перспективную сетку по типу рис. 6 для наиболее вероятной высоты съёмки. Матовое стекло нужно установить так, чтобы координатные линии на сетке прошли через зубцы соответствующих координатных меток прикладной рамки фотокамеры.

Установив фотокамеру так же, как и для фотосъёмки, т. е. чтобы движение изображения льдин на матовом стекле совершалось вдоль линии горизонта, нужно наблюдать за переме-

щением этих изображений. По перспективной сетке можно определить путь, пройденный льдиной за определенное время, которое отмечается по секундомеру. Секундомер нужно пускать в ход, когда льдина подойдёт к какой-либо линии сетки, секундомер нужно остановить и прочесть показания его, когда льдина пройдёт 20 — 30 метров, что легко определить по сетке, зная расстояние в предметной плоскости, соответствующее промежутку между смежными линиями сетки. Для момента наблюдений по сетке нужно знать высоту центра объектива фотокамеры над уровнем воды в реке, для чего производят периодические отсчеты по водомерной рейке, нуль которой должен быть связан нивелировкой с центром объектива фотокамеры. Высота центра объектива в любой момент наблюдений может быть найдена путем интерполяции по времени.

Так как высота камеры в момент наблюдений не соответствует той высоте, для которой рассчитана перспективная сетка, то расстояние, взятое по сетке, нужно исправить умножением на коэффициент κ, равный отношению фактической высоты фотокамеры к той высоте, для которой рассчитана и построена перспективная сетка. Разделив путь на время, получают искомую скорость. Например, по перспективной сетке, изображенной на рис. 6, произведено наблюдение за движением льдины от точки a к точке b Этот путь льдина прошла за 9 секунд. Сетка составлена для высоты инструмента в 20 *м*, фактическая же высота оказалась 18 *м*, откуда коэффициент κ будет равен $18 : 20 = 0{,}9$. Расстояние ab по сетке определяется в 20 *м*, истинное расстояние получается умножением наблюденного расстояния на κ, т е. $20 \times 0{,}9 = 18$ *м*. Следовательно, за 9 секунд льдина переместилась на 18 *м*, а секундная скорость её равна $18 : 9 = 2$ метрам.

В рассмотренном числовом примере взят случай движения льдины в направлении главной горизонтали. Если льдина движется в произвольном направлении, например, в направлении ac (рис. 6), то на сетке нужно отметить точки, в которых начато и окончено определение времени движения льдины. Затем нужно построить сеть квадратов в каком-либо масштабе со стороной, равной стороне трапеций и перенести на эту сетку точки a и c. Путь льдины ac определяется графически, т. к. масштаб сетки квадратов известен. Для случая, изображенного на рис. 6, расстояние ac равно 20 *м*. Дальнейшие вычисления аналогичны предыдущему случаю.

При плохом освещении и малой светосиле объектива съёмочной камеры визуальный метод определения расстояний по матовому стеклу становится затруднительным. В таких случаях нужно произвести фотографирование изучаемой льдины дважды на одну и ту же пластинку при неизменном ориентировании камеры, отметив по секундомеру время между экспозициями. На таком фотоснимке одна и та же льдина изобразится дваж-

ды. Выбрав на обоих изображениях одну и ту же хорошо заметную точку, нужно определить ее координаты одним из способов, указанных в § 6, что позволит нанести оба положения точки на сеть квадратов и определить расстояние между этими положениями. Это будет путь точки, время же определено по секундомеру, как интервал между экспозициями. Таким образом можно получить исходные данные для вычисления искомой скорости. При значительном количестве льдин, сфотографированных на одном снимке, этот способ определения скорости становится неудобным, так как отождествление двух положений точки, принадлежащей одной и той же льдине, затрудняется.

При съёмке с движущегося судна таким путем можно определить путевую скорость.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Н. Н. Зубов**. Морские воды и льды. М. Гидрометеоиздат, 1938.
2. Госстрой СССР. Технические условия определения ледовых нагрузок на речные сооружения. СН 76 — 59. М., Госстройиздат, 1960.
3. **Д. И. Никифоров** Фотограмметрия в морских исследованиях под гидротехнические сооружения. Л., Из-во „Морской транспорт", 1957.
4. **Р. Ю. Тиле**. Фотограмметрия в современном развитии. Т 1 — 3 Спб., 1908 — 1909.
5. **Н. Г. Келль**. Фотография и фотограмметрия. М—Л. ОНТИ, 1937.
6. **Ф. В. Дробышев**. Основы аэрофотосъёмки и фотограмметрии. М., Геодезиздат, 1955.
7. **Л. Ф. Титов** и **Ф. А. Коршак**. Руководство по стереофотограмметрической съёмке волн. М — Л., Из-во Главсевморпути, 1948.

ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА

1961 УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ Том X

М-Ш. И. Амирханов

СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕРСКО-СУЛАКСКОЙ НИЗМЕННОСТИ ДАССР

В принятых XXI съездом КПСС контрольных цифрах развития народного хозяйства СССР на 1959 — 1965 гг. предусматривается широкое развитие промышленного, жилищного, гидротехнического, дорожного, сельскохозяйственного и другого строительства. Успешное выполнение этой задачи потребует огромного количества разнообразных видов строительных материалов.

В обширной номенклатуре основное место занимают нерудные строительные материалы: камень, щебень, гравий, песок, глина и другие. Примерно 70—80% их потребляется непосредственно в строительстве и 20—30% — для производства цемента, извести, кирпича, керамических изделий и т. д.

Для удешевления строительства и разгрузки железнодорожного транспорта производство нерудных строительных материалов должно базироваться на максимальном и рациональном использовании местных сырьевых ресурсов.

Дагестанская АССР за семилетие должна построить за счет государственных капиталовложений ряд крупных заводов, 600 тысяч квадратных метров жилой площади, тысячи километров автомобильных дорог, много искусственных сооружений (мостов, труб, подпорных стенок), гидроэлектростанций, большое количество школ, больниц и т. п. Нет сомнения, что для успешного выполнения такого огромного строительства потребуются поиски и разведка новых месторождений нерудных строительных материалов с большим объемом разработок.

До последнего времени подавляющее большинство строительных организаций республики не придавало серьезного значения поискам, разведке и научно-обоснованному выбору необходимых им нерудных строительных материалов. Поиски

карьеров производились только в период начала строительства и принимались для разработки те месторождения, которые могли обеспечить своим запасом намеченный к строительству объект. О дальнейшем развитии эксплуатируемых карьеров не заботились. Качество материала, зачастую, определялось не лабораторными испытаниями, а визуально и по „авторитетному" заключению о его пригодности того или иного специалиста — это считалось вполне достаточным.

Безусловно, при таком выборе материала были отклонения от требований ГОСТов, снижалось качество сооружений, ухудшалось проектирование и, в конце концов, удорожалось строительство.

С предстоящим большим развитием капитального строительства в Дагестане и необходимостью осуществления ответственных сооружений с высокими их качествами, ранее существовавший подход к постановке поисково-разведочных работ по изысканию нерудных строительных материалов и определение их качества не может быть ныне приемлемым.

Поисково-разведочные изыскания с лабораторным исследованием свойств материалов являются сложной и длительной работой, требующей соответствующих специалистов, материальных средств и хорошо оборудованных лабораторий. Не все Дагестанские строительные организации располагают этим, поэтому они вынуждены обращаться в лаборатории других городов: Баку, Пятигорска, Москвы и т. д.

В Дагестане нет научно-исследовательского института и организаций по изучению строительных материалов. Поэтому разведка нерудного сырья республики до последнего времени остается не организованной и далеко не везде выявлены запасы сырья.

Учитывая это обстоятельство, автором данной статьи проведено исследование гравийно-галечниковых материалов рек Терско-Сулакской низменности Дагестана, которые могут быть использованы как сырье для производства бетона, железобетона, асфальтобетона и т. д.

Испытание гравийно-галечникового материала проводилось в соответствии с ГОСТом 8269-56—„Щебень из естественного камня и гравий для строительных работ. Методы испытаний".

Пробы для лабораторных испытаний брались на месте из шурфов глубиной в 1 *м*. Вес каждой пробы 50—100 *кг*. Всего исследован и лабораторно испытан материал пяти рек: Аксая, Ярык-Су, Акташа, Сулака и Шура-Озень.

1. Гравийно-галечниковый материал реки Аксай.

Река Аксай образуется из ряда мощных родников, расположенных на северных склонах Андийского хребта на высоте 2000 *м* над уровнем моря.

Эта река имеет паводочный режим. При ливневых дождях в весенне-летние месяцы минимальный расход воды, равный в среднем 3,0 *м³/сек*, быстро возрастает, достигая 200—220 *м³/сек*.

Протекая на значительном своем протяжении по территории Чечено-Ингушской АССР, река Аксай при паводках во время дождей разрушает горные породы, слагающие бассейн реки и состоящие из глинистых сланцев, известняков, разнообразных песчаников, глин и мергелей. Эти горные породы по своим физико-механическим свойствам весьма различны.

Вступив в пределы Дагестана, река Аксай, вследствие малых уклонов ложа, замедляет своё течение, русло её непрерывно перемещается с одного берега к другому и разбивается на отдельные рукава.

Начиная с сел. Герзель-аул, она протекает в русле, прорезанном в собственных гравийно-галечниковых отложениях. Это русло имеет форму извилистого ящикообразного оврага с обрывистыми склонами, высота которых находится в пределах от 2 до 12 *м*.

Гравийно-галечниковый материал встречается до сел. Аксай. Ниже. на расстоянии 6 8 *км*, гравий встречается мелких фракций и в небольших объемах по пойме реки.

Аллювиальные отложения в долине реки Аксай имеют право- и левобережные террасы, сложенные гравийным материалом с суглинистым покровом мощностью от 0 до 3,0 *м*. Запасы материала как в самой пойме, так и по берегам и террасам, огромны.

Вниз по течению реки содержание валунов и гальки в отложениях уменьшается. Наибольшее количество валунов обнаруживается в пойме реки и выше моста автомобильной дороги Ростов-Баку. Размеры валунов достигают 0,2—0,5 *м*.

Для исследований взято пять проб. Они были рассортированы визуальным осмотром на отдельные виды горных пород. В результате этого разделения оказалось, что гравийно-галечниковый материал ранних и современных аллювиальных отложений реки Аксай состоит из следующих пород:

1. Плотных окремнённых известняков белого и серого цвета	—55—70%
2. Плотных глауконитовых песчаников	— 5— 7%
3. Слабых песчаников серого цвета	— 8—15%
4. Слабых известняков серого цвета	—12—15%
5. Плотных глинистых сланцев	— 9—12%

При лабораторном испытании их физико-механические свойства оказались в пределах, показанных в табл. 1.

Таблица 1

Физико-механические свойства

№№ п/п	Наименование грунтовых пород	Удельный вес, $г/см^3$	Объемный вес, $г/см^3$	Водопоглощение, %	Истираемость в полочном барабане %	Сцепляемость с битумом в баллах	
						В сухом состоянии	В водонасыщенном сост.
1	Плотные окремненные известняки белого и серого цвета	2,65—2,70	2,60—2,67	1,20—1,60	21,6—24,0	5	4
2	Плотные глауконитовые песчаники	2,64—2,71	2,61—2,68	0,90—1,15	19,4—20,6	4	3
3	Слабые песчаники серого цвета	2,62—2,68	2,44—2,51	3,40—4,20	39,6—42,5	4	3
4	Слабые известняки серого цвета	2,63—2,69	2,42—2,50	4,35—4,80	44,3—46,8	5	4
5	Плотные глинистые сланцы	2,62—2,66	2,48—2,52	1,30—1,45	2,67—29,2	4	3

Отобранные в пойме реки 60 штук валунов и рассортированные по отдельным видам горных пород оказались по составу аналогичны в % соотношении с гравийно-галечниковым материалом.

Предел прочности при сжатии в водонасыщенном состоянии колеблется в пределах от 250 до 1360 $кг/см^2$.

Несортированный по отдельным видам горных пород гравий состоит:

1. По гранулометрическому составу из фракций:

100 *мм* и выше — 8—10%
70—100 *мм* — 4—14%
5—70 *мм* — 60—73%
5 *мм* и меньше — 12—24%

Глина и пыль имеются в пределах 5,5—8,2%

2. Пластинчатых и игловатых зерен.

Размер фракций, *мм*	100—70	70—40	40—20	20—10
Содержание пластинчатых и игловатых зерен, %	17,4—19,2	18,7—21,4	17,8—18,6	16,4—18,2

Испытание гравия на прочность в полочном барабане показало, что величина износа колеблется в пределах 20,6—24,2% — марка „И30".

Выводы. Гравийно-галичниковый материал реки Аксай по петрографическому составу имеет зерна различных горных пород с разнообразными физико-механическими свойствами. Кроме этого, пластинчатых и игловатых фракций и глины больше допускаемого предела. Поэтому он не отвечает требованиям ГОСТа 8268—56.

Однако при удалении грохочением и промывкой глины и пыли с добавлением дробленного щебня, гравийный материал реки Аксай может быть использован для бетона низких марок и под основание дорожного покрытия.

Физико-механические свойства материала показаны в табл. 2, а гранулометрический состав в табл. 3.

2. Гравийно-галечниковый материал реки Ярык-Су.

Река Ярык-Су образуется из родников, расположенных на высоте 1700-2100 *м* над уровнем моря. Протекая в северо-восточном направлении, она проходит по западной окраине города Хасавюрта и впадает в речку Акташ близ селения Кадыротор.

В верховьях р. Ярык-Су течет по узкому коньёну со скоростью 1,5—2,0 *м/сек*. При выходе на низменность течение реки становится спокойным. От селения Новолакское и до гор. Хасавюрта река блуждает по широкой гравийно-галичниковой пойме со скоростью течения 0,2—0,3 *м/сек*. при глубине 0,1—0,5 *м*.

Река Ярык-Су, как и большинство рек Приморской низменности, имеет паводочный режим. Средний годовой расход ее составляет 1,75 *м³/сек*. В летние дождливые месяцы расход часто достигает 150—200 *м³/сек*. Большую часть года она представляет весьма незначительный водоток, а нередко и вовсе пересыхает.

С поверхности 376 *кв. км*. бассейна реки Ярык-Су, который сложен известняками, мергелями и частично песчаниками средней плотности, смыкаются бурными потоками воды продукты эрозии гор. Этот материал рекой сносится на низменность и там образуются аллювиальные гравийно-галечниковые отложения.

Гравийно-галечниковые отложения на участке сел. Новолакское — гор. Хасавюрт по величине фракций сложены вниз по течению, последовательно уменьшаясь в размерах.

Если у сел. Новолакское встречаются валуны и гальки в количестве 22—25%, то ниже города Хасавюрта их почти нет.

Характерной особенностью долины реки Ярык Су является наличие на участке с. Новолакское — гор. Хасавюрт четырех двухсторонних террас ранних аллювиальных отложений.

Как строительный гравийно-галечниковый материал заслуживает внимания район поймы реки, береговых отложений и террас у самого города Хасавюрта и ниже железнодорожного моста. Здесь материал имеется в большем количестве и удо-

Таблица 2

Физико-механические свойства гравийно-галечникового материала реки Аксай.

Место взятия пробы	Объемный вес *кг/см³*	Объемный насыпной вес *кг/м³*	Пустотность %	Водопоглощение %	Морозостойкость потеря в весе при Мр 15%	Истираемость в полочном барабане %	Сцепляемость с битумом в баллах	
							В сухом состоянии	В водонасыщенном состоянии
На 100 метров выше моста Орджоникидзевской железной дороги Ростов-Баку								
1. Правый берег	2,61	1,93	25,90	1,21	1,21	22,45	5	4
2. Левый берег	2,59	1,87	27,70	0,94	2,17	23,28	4	4
На створе моста автомобильной дороги Ростов-Баку								
1. Правый берег	2,62	1,91	27,00	0,99	2,24	21,20	4	4
2. Левый берег	2,58	1,88	27,00	1,31	1,92	20,65	5	4
Над первой надпойменной правобережной терасой, вправо на 60 *м* от дороги Ростов-Баку	2,59	1,86	28,00	1,17	1,42	24,2	5	4

Таблица 3

Гранулометрический состав гравийно-галечникового материала реки Аксай. Прошло через сита в %%.

Место взятия пробы	Размер сит в *мм*								Пыль и глина
	100	70	40	20	10	5	2	0,5	
На 100 метров выше моста Орджоникидзевской железной дороги Ростов-Баку									
Правый берег	100,00	96,18	86,32	56,12	42,29	22,92	16,10	11,62	6,86
Левый берег	100,00	95,85	87,13	55,53	42,78	26,48	19,37	13,58	8,18
На створе моста автомобильной дороги Ростов-Баку									
Правый берег	99,90	78,14	62,30	36,90	22,10	15,90	13,00	9,80	6,62
Левый берег	90,60	78,30	62,10	37,75	19,95	14,10	10,90	7,78	5,49
На первой правобережной надпойменной терасой, вправо на 60 метров от дороги Ростов-Баку	100,00	94,86	84,60	56,50	40,55	22,45	16,50	13,26	8,18

бен для разработки при помощи машин карьерного хозяйства. Грунтовые воды отсутствуют. Вскрыша весьма малая — 0—1,0 *м* и имеется только на террасах и на береговых обнажениях.

Лабораторно исследованный гравийно-галечниковый материал реки Ярык-Су составит в основном (90—92%) из серовато-белых окремненных известняков и песчаников средней плотности. Заполнителем служит супесь — 10—22%. Гравий и галька хорошо окатаны.

Фракционный состав материала колеблется в пределах;

70 *мм* и выше — 2—22%
5—70 *мм* —60—77%
5 *мм* и меньше —17—27%

Пластинчатых и игловатых зерен имеется в следующем объеме:

Размер фракций, *мм*	100—70	70—40	40—20	20—10
Содержание пластинчатых и игловатых зерен, %	12,2—14,6	11,5—14,3	10,7—13,8	11,1—13,6

Испытание гравия на прочность в полочном барабане показало, что величина износа колеблется в пределах 26,4—28,0% — марка „И30". Максимальная величина водопоглощения — 1,48%. Испытание на сцепляемость с битумом марки „Б"-3 в сухом и водонасыщенном состоянии показало, что величина сцепления колеблется в пределах 4 — 5 баллов. Потеря в весе при испытании на морозостойкость при Мрз 15 составило 1,4—1,8%.

Выводы. Гравийно-галечниковый материал реки Ярык-Су и его ранних и современных отложений при сортировке путем грохочения на необходимый гранулометрический состав отвечает требованиям ГОСТа 8268—56 — „Гравий для строительных работ. Общие требования".

Физико-механические свойства представлены в табл. 4, а гранулометрический состав в табл. 5.

3. Гравийно-галечниковый материал реки Акташ.

Река Акташ с многочисленными притоками образуется из родников, расположенных на высоте 1500—2300 *м* над уровнем моря северного склона хребета Сала-Тау.

Сала-Тауский хребет, окаймляющий с севера горную часть Дагестана, представляет собой моноклинальное поднятие, сложенное в основном известняками, мергелями и частично доломитами и песчаниками.

Таблица 4

Физико-механические свойства гравийно-галечникового материала реки Ярык-Су.

Место взятия проб	Объемный вес, $г/см^3$	Объемный насыпной вес, $кв/м^3$	Пустотность %	Водопоглощение, %	Морозостойкость, потеря в весе при мрз 15	Истираемость в полочном барабане %	Сцепляемость с битумом в баллах	
							в сухом состоянии	в водонасыщенном состоянии
На правом берегу поймы у селения Новолакское (галечниковое отложение)	2,57	1,85	28,00	1,62	1,12	29,2	5	4
По оси автомобильной дороги Ростов-Баку								
1) Правый берег поймы	2,58	1,86	27,80	1,17	1,28	28,4	5	4
2) Левый берег поймы	2,56	1,84	28,00	1,24	1,11	27,8	5	4
3) Русло реки	2,59	1,86	28,00	1,50	1,32	29,6	5	4
Правобережное обнажение, на 400 метров ниже железной дороги								
1) Надпойменная терраса	2,57	1,87	27,00	1,31	1,17	26,4	5	4
2) Пойменная терраса	2,58	1,88	27,00	1,28	1,24	27,2	5	4

Таблица 5

Гранулометрический состав гравийно-галечникового материала реки Ярык-Су.
Прошло через сита в %%.

Место взятие пробы	Размер сит в *мм*								Пыль и глина
	100	70	40	20	10	5	2	0,5	
На правом берегу поймы у селения Новолакское (галечниковое обнажение)	91,86	77,56	57,96	39,51	22,21	16,99	12,88	7,08	4,12
По оси автомобильной дороги Ростов-Баку									
Правый берег поймы	160,00	98,15	71,80	46,30	29,40	22,10	16,50	13,30	3,72
Левый берег поймы	100,00	97,65	72,25	46,07	28,67	20,57	15,41	11,21	3,88
Русло реки	100,00	97,05	73,00	46,30	29,40	23,05	19,85	13,95	4,19
Правобережное обнажение, на 400 метров ниже железной дороги									
Надпойменная терраса	100,00	100,0	72,20	48,80	30,05	24,70	18,58	14,38	5,10
Пойменная терраса	100,00	100,0	75,38	53,98	35,13	27,83	22,41	16,13	7,20

В летние месяцы при ливневых дождях сухие балки и овраги Сала-Тауского хребта, наклоненно падающие в сторону предгорной северной части Дагестана, мгновенно превращаются в бурные реки, несущие огромное количество продуктов разрушения горных пород.

Весь этот материал, дробясь и окатываясь в потоках воды, сносится на низменную часть и создает отложения в виде гальки, гравия и ила на территорию вдоль поймы реки Акташ от Эндрей-аула и до Баммат-юрта Хасавюртовского района.

Мелкие фракции продуктов разрушения горных пород (песок и глина) частично выносятся рекой за пределы Баммат-юрта к северной окраине Хасавюртовского района.

Река Акташ в низменной своей части имеет широкую пойму с берегами, высотой 1—2 *м*. Пойма достигает 200—300 *м*, русло не постоянное, ширина которого изменяется от 3 до 20 *м* при глубине 0,2- 1 2 *м*. Средний расход воды при выходе реки из гор составляет 1.4 *куб. м/сек*. При сильных дождях бывают паводки, изредка достигая колоссальных размеров. Например, 1958 году, в апреле месяце расход воды увеличился более, чем в 100 раз, достигнув 190 $м^3/сек$. Вода не проходила под железнодорожный мост и через овоидальную трубу, сечением 2,5 × 2,0 *м* и размыла железнодорожное полотно, затопив на левом берегу ниже моста площадь до одного *кв. км*.

Вследствие малого уклона ложа, река, блуждая по пойме, рассеивает и нагромождает принесенный ею гравийно-галечниковый материал, покрывая им нижележащие отложения аллювиальной равнины.

У выхода реки Акташ из гор в отложениях имеются в значительном количестве валуны (10—15%), размер которых невелик —15—20 *см*. Приближаясь к автомобильной дороге Ростов — Баку, количество их уменьшается и у железной дороги их обнаруживается не более 3—4%.

Грунтовые воды в пойме реки обнаруживались на глубине 0,1—0,2 *м*. Воды пресные. Наблюдалось изменение режима воды в одном и том же шурфе, что по всей вероятности, зависит от времени года, режима реки и количества выпадающих атмосферных осадков.

Ранние и современные отложения гальки и гравия состоят в основном из белых —90 92%, серых и розоватых известняков с незначительной примесью песчаников серого цвета.

Известняки — средней плотности, следы выветривания почти не заметны. Гравий и галька хорошо окатаны. Заполнителем служат разнозернистые известняковые пески —10—22% и глина с пылью 1,3—4,0%.

Фракционный состав материала колеблется в пределах:

70 *мм* и выше — 0—20,0%
5—70 *мм* —70—80%
5*мм* и меньше —10—25%

Пластинчатых и игловатых зерен по всем пробам оказалось в следующем количестве:

Размер фракций, *мм*	100—70	70—40	40—20	20—10
Содержание пластинчатых и игловатых зерен, %	0,0—2,5	12,0—18,0	14,0—18,3	15,5—18,0

Испытание гравия на прочность в полочном барабане, показало, что величина износа колеблется в пределах 20-22% — марка „И30".

Максимальная величина водопоглощения —1,27%.

Испытание на сцепляемость с битумом марки „Б"—3 в сухом и водонасыщенном состоянии показало, что величина сцепления колеблется в пределах 4—5 баллов.

Определение на морозостойкость гравия непосредственным замораживанием при Мрз 15 показало, что материал морозостойкий, потеря в весе составляет 1,3—1,6%.

Выводы. Гравийно-галечниковый материал реки Акташ при отгрохотке его по соответствующему гранулометрическому составу отвечает требованиям ГОСТа 8268-56.

Увеличенное процентное содержание пластинчатых и игловатых зерен может быть уменьшено путем добавления в гравийную смесь дробленного галечникового материала.

Месторождение может служить для организации строительного карьера. Для промышленной разработки месторождение неблагоприятное и кроме этого не является целесообразным, т. к. материал реки Сулак более высокой марки, чем реки Акташ и заносы его меньше, чем в Чирюрте.

Физико-механические свойства материала показаны в табл. 6, а гранулометричаский состав в табл. 7.

4. Валунно-галечниковый материал реки Сулак

Второй крупной рекой после Терека в Дагестане является Сулак. Он образуется от слияния у Ашильтинского моста четырех крупных рек: Андийского-Койсу, Аварского-Койсу, Кара-Койсу и Казикумухского-Койсу.

Андийское-Койсу берет свое начало в пределах Грузинской ССР с ледников Пирикительского и Снегового хребтов.

Река Джурмут сливается с рекой Хзан-ор, обе они берут свое начало со снеговых вершин и ледников Богосского, Нукетильского и Главного Кавказского хребтов и вместе образуют Аварское-Койсу.

У Араканского железного (красного) моста в Аварское-Койсу впадает Кара-Койсу с главным его притоком Казикумухское-

Таблица 6

Физико-механические свойства гравийно-галечникового материала реки Акташ.

Место взятия пробы	Объемный вес, $г/см^3$	Объемный насыпной вес, $кг/м^3$	Пустотность, %	Водопоглощение, %	Морозостойкость, потеря в весе при Мрз 15, %	Истираемость в полочном барабане, %	Сцепление с битумом в баллах	
							В сухом состоянии	В водонасыщенном состоянии
На 50 метров выше моста автомобильной дороги Ростов-Баку:								
Правый берег	2,63	2,01	23,50	1,27	1,82	21,48	5	4
Русло реки	2,61	1,98	24,20	1,13	1,44	22,13	5	4
Левый берег	2,65	2,00	24,50	0,06	1,31	20,60	5	4
На 100 метров выше моста Орджоникидзевской железной дороги:								
Правый берег	2,60	1,96	24,50	1,10	1,58	21,67	5	4
Русло реки	2,62	1,98	24,40	1,18	1,33	20,82	5	4
Левый берег	2,59	1,97	24,00	0,99	1,60	21,30	5	4

Таблица 7

Гранулометрический состав гравийно-галечникового материала реки Акташ.
Прошло через сита в % %.

Место взятия пробы	Размер сит в *мм*								Пыль и глина
	100	70	40	20	10	5	2	0,5	
На 50 метров выше моста автомобильной дороги Ростов-Баку:									
Правый берег	100,0	84,20	67,75	41,15	23,15	15,50	12,63	10,41	2,72
Русло реки	100,0	80,10	66,10	30,00	15,90	10,40	6,70	4,90	1,32
Левый берег	100,0	89,40	69,35	34,45	25,00	18,75	14,40	10,60	3,42
На 100 метров выше моста Орджоникидзевской железной дорогй									
Правый берег	100,0	100,0	89,50	58,00	33,20	17,90	14,70	12,05	3,85
Русло реки	100,0	98,30	84,15	59,00	35,95	23,90	19,42	16,60	3,74
Левый берег	100,0	100,0	80,75	50,50	29,90	18,10	13,95	10,80	3,92

Койсу. Истоки Кара-Койсу находятся на снеговых вершинах и ледниках высокогорных хребтов Таклика и Дюльтидага, а Казикумухского-Койсу—на Дюльтидагском и Самурском хребтах.

Упомянутые горные поднятия, имеющие ряд вершин более 4000 метров над уровнем моря, сложены из осадочных пород нижней юры. Продукты их разрушения, влекомые водами четырех Койсу, являются в основном плотные темно-серые и черные аспидные сланцы, кварцитовые песчаники и глинистые сланцы.

Вступив в пределы внутреннего мелового Дагестана, Койсу обогащаются известняками, доломитами, мергелями, песчаниками и другими горными породами.

Почти весь внутренний и высокогорный альпийский Дагестан, площадью около 15000 *кв. км*, является бассейном р. Сулака, дающей в среднем 180 *куб. м/сек.* воды с огромным количеством строительного материала в виде валунов, гальки, гравия и песка. Этот материал выносится из гор и отлагается в Прикаспийской низменности.

Геологическое строение гор водосборного бассейна реки Сулак обуславливает разнообразие петрографического состава и физико-механических свойств ранних и современных аллювиальных отложений реки. В валунно-галечниковом материале обнаруживаются в различных процентных соотношениях почти все виды горных пород юрского, мелового, третичного и четвертичного геологических периодов.

Продукты разрушения изверженных горных пород встречаются весьма в ограниченном количестве —0,1—0,2%.

Ранние и современные аллювиальные отложения представлены в Чирюртовской Присулакской долине большими площадями с мощностью полезного ископаемого от 1 до 12 *м* при вскрышке от 0,0 до 1 *м*. Берега реки Сулак имеют вертикальные обнажения мощностью до 10—15 *м*. Русло и пойма реки, достигающие ширины 1—2 *км*, имеют большие запасы валунов, гальки, гравия и песка. Особое внимание заслуживает вторая надпойменная терраса правобережья, простирающаяся на расстояние 2,5—3,0 *км* от русла реки. Здесь материал сложен равномерно и месторождение его удобно для организация карьерного хозяйства.

Валуны и гравийно-галечниковый материал с песчаным заполнителем сложен в Чирюртовской долине по крупности фракций не везде равномерно. При удалении от поймы встречаются отложения только гравийного материала с небольшим количеством гальки и валунов. Ближе к пойме наблюдается увеличение крупных фракций. В вертикальном разрезе также увеличивается процент содержания крупных валунов по направлению сверху вниз. В пойме и русле реки обнаруживаются валуны больших размеров —0,2—0,5*м*.

Петрографический состав материала ранних и современных

Чирюртовских отложений почти одинаковый. Это объясняется тем, что река Сулак тысячелетиями протекает по одним и тем же осадочным породам горных поднятий и продукты их разрушения, влекомые водами Сулака, являются постоянными.

Строящаяся Чирюртовская ГЭС, Управление Северо Кавказской железной дороги. Управление автомобильной дороги Ростов-Баку широко пользуется валунно-галечниковым материалом, гравием и песком поймы и береговых обнажений реки Сулак и его аллювиальными отложениями для изготовления бетона, железобетона, асфальтобетона, а также для балласта.

Исследованный материал реки Сулак состоит.

1. По петрографическому составу в основном из четырех видов горных пород:

а) Плотных кварцитовых песчаников Черного цвета с серым оттенком — 28—36%

б) Плотных песчаников темно-серого цвета — 16 - 24%

в) Известняков, доломитов, мергелистых известняков и других карбонатных пород — 25—30%

г) Плотных глинистых сланцев черного цвета — 18—22%

2. По гранулометрическому составу из фракций:

100 *мм* и выше	— 12—46%
70—100 *мм*	— 15—20%
5— 70 *мм*	— 36—50%
5 *мм* и меньше	— 6—14%

Глина и пыль имеется в пределах 0,5—0,7%

3. Из пластинчатых и игловатых зерен.

Размер фракций, *мм*	100—70	70—40	40—20	20—10
Содержание пластинчатых и игловатых зерен, %	13,4—14,2	14,2—15,0	11,5—13,4	13,6—14,8

Испытание гравия на прочность в полочном барабане показало, что величина износа колеблется в пределах 13,3 - 14,6% — марка „И“ 20.

Максимальная величина водопоглощения 0,70%.

Испытания на сцепляемость с битумом марки „Б“—3 в сухом и водонасыщенном состоянии показали, что величина сцепления колеблется в пределах 3—4 баллов.

Определение на морозостойкость гравия непосредственным замораживанием при Мрз 15 показало, что материал морозостойкий и потеря в весе низкая —0,2—0,3%.

При испытании валунов горных пород различных петрографических составов получены результаты, показанные в таблице 8.

Выводы. Валунный гравийно-галечниковый материал аллювиальных отложений Чирюртовской долины, русла и поймы реки вполне пригодны для всех видов строительства — отвечает по своим физико-механическим свойствам требованиям высоких марок по ГОСТу 8286—56.

Наличие большого количества валунов дает возможность организовать дробление его для получения высококачественного щебня. Запасы материла практически неисчерпаемы.

Перспектива развития строительства промышленно-гражданских предприятий Чирюртовского узла диктует необходимость проведения поисково-разведочных работ по всей территории Присулакской низменности от плотины Чирюртовской ГЭС и до селения Нечаевка и правильного размещения, организации и эксплуатации промышленных и строительных карьеров.

Физико-механические свойства материалов показаны в табл. 9, а гранулометрический состав их в табл. 10.

5. Гравийный материал реки Шура-Озень.

Юго-западный склон полого спускающегося моноклинального Гимринского хребта в пределах предгорного Буйнакского района является бассейном реки Шура-Озень, площадь которого составляет 350 *кв. км.*

Питание реки Шура-Озень происходит в основном за счет весеннего таяния снегов и летних дождей. Расход воды грунтовых и родниковых весьма низкий, он составляет 0,3 $м^3/сек$.

Отличительной чертой этой реки является то, что режим водности резко выражен в зависимости от времени года и осадков. В очень жаркие и бездождливые годы река совершенно высыхает. При сильных ливневых дождях, выпадающих на склонах Гимринского хребта, наблюдается увеличение расхода воды в несколько сот раз и достигает 600—800 $м^3/сек$.

Только в эти паводковые периоды материал меловых известняков и мергелей в виде камней, щебня и глины, смытый с поверхности бассейна, дробясь и окатываясь в бурных потоках, сносится рекой Шура-Озень к Приморской низменности Ленинского района. При этом взвешанные частицы глины и песка рекой сносятся даже за пределы Шамхальского железнодорожного моста, а гравий, передвигаемый рекой, по мере удаления от гор уменьшается в объеме и откладывается только до моста.

Таблица 8

Результат испытания валунов.

№№ пп.	Наименование горной породы	Удельный вес, $г/см^3$	Объемный вес, $г/см^3$	Водопоглощение, %	Истираемость щебня в полочном барабане, %	Предел прочности при сжатии в водонасыщенном состоянии, $кг/см^3$	Сцепляемость с битумом в баллах	
							В сухом состоянии	В водонасыщенном состоянии
1	Плотные кварцитовые песчаники черного цвета с серым оттенком	2,69—2,72	2,65—2,72	0,13—0,15	6,2—7,3	2400—2750	3	3
2	Плотные песчаники темно-серого цвета	2,65—2,70	2,63—2,68	0,26—0,32	17,6—19,2	1020—1400	3	3
3	Карбонитные породы	2,65—2,70	2,61—2,68	0,30—0,35	18,3—19,9	800—1350	5	5
4	Плотные глинистые сланцы черного цвета	2,63—2,68	2,60—2,65	0,28—0,32	17,4—18,8	800—1230	4	3

Таблица 9

Физико-механические свойства валунно-галечникового материала реки Сулак.

Место взятия пробы	Объемный вес, $г/см^3$	Объемный насыпной вес, в $кг^3/см$	Пустотность, %	Водопоглощаемость, %	Морозостойкость, потеря в весе при Мрз 15, %	Истираемость в полочном барабане, %	Сцепляемость с битумом в баллах	
							В сухом состоянии	В водонасыщенном состоянии
На второй надпойменной террасе правобережья, вправо от автомобильной дороги Ростов-Баку	2,64	2,01	23,9	0,63	0,18	13,8	3—4	3
На карьере асфальтобетонного завода ДСЭР № 3 Упрдора Ростов-Баку	2,66	2,00	24,8	0,51	0,22	14,2	3—4	3
На левом берегу реки у силовой станции Чирюртовской ГЭС	2,62	1,98	24,4	0,70	0,30	13,3	3—4	3
На 130 метров вправо от КОРа, в 3-х километрах от станции Чирюрт в сторону Махачкалы	2,68	2,06	23,0	0,49	0,26	14,6	3—4	3

Таблица 10

Гранулометрический состав валунно-галечникового материала реки Сулак.
Прошло через сита в % %

Место взятия пробы	Размер сит в *мм*								Пыль и глина
	100	70	40	20	10	5	2	0,5	
На второй надпойменной террасе правобережья, вправо от автомобильной дороги Ростов-Баку	78,25	58,60	45,40	24,90	12,38	6,10	4,40	2,60	6,82
На карьере асфальтобетонного завода ДСЭР № 3 Упрдора Ростов-Баку глубина шурфа 2,5 *м*	75,38	56,90	42,56	26,14	12,78	7,50	5,44	3,32	6,36
На левом берегу реки у силовой станции Чирюртовской ГЭС	73,58	54,38	38,96	21,83	11,66	7,34	4,29	2,39	5,94
На 130 вправо от КОРа, в 3 *км* от станции Чирюрт в сторону Махачкалы	87,65	72,83	56,43	35,23	24,63	16,03	10,13	5,83	5,62

Таблица 11

Физико-механические свойства гравийного материала реки Шура-Озень.

Место взятия пробы	Объемный вес, г/см³	Объемный насыпной вес, кг/см³	Пустотность, %	Морозостойкость, потеря в весе при Мрз 15° %	Водопоглощение, %	Истираемость в полочном барабане, %	Сцепляемость с битумом в баллах	
							В сухом состоянии	В насыщенном состоян.
На 20 метров ниже автодорожного моста у сел. Шамхал:								
1. Правый берег	2,56	1,84	28,00	3,45	2,56	29,8	5	4
2. Левый берег	2,58	1,86	27,90	3,84	2,72	27,6	5	4
По оси будущей трассы автодороги Ростов-Баку:								
1. Правый берег	2,60	1,91	26,50	4,21	2,37	28,4	5	4
2. Левый берег	2,57	1,82	29,00	3,62	2,61	30,0	5	4

Таблица 12

Гранулометрический состав гравийного материала реки Шура-Озень.

Прошло через сита в % %

Место взятия пробы	Размер сит в мм								Пыль и глина
	100	70	40	20	10	5	2	0,5	
Правый берег	100,00	100,00	91,35	63,29	30,83	20,83	19,21	10,28	0,48
Левый берег	100,00	100,00	92,60	65,25	31,73	20,13	16,89	10,07	0,62
По оси будущей трассы автодороги Ростов-Баку									
Правый берег	100,00	97,50	86,10	57,90	27,55	17,25	14,39	9,07	0,53
Левый берег	100,00	100,00	86,25	56,60	23,85	13,43	11,22	7,05	0,71

Береговые обнажения гравийного материала встречаются небольшими толщами - 0,5—1,5 *м* при большей вскрыше —5—6*м*. В основном материал сосредоточен в пойме реки, с мощностью 1—2 метра. Ширина поймы — 30—80 *м*.

Исследованный гравийный материал реки Шура-Озень состоит из меловых известняков. Величина износа в полочном барабане составляет —27,6—30,0%, водопоглощение —2,37—2,76%. При определении на морозостойкость непосредственным замораживанием при Мрз 15 потеря в весе составила 3,45—4,21%.

По гранулометрическому составу гравий состоит из фракций:

100 *мм* и выше	—	0,0%
70—100 *мм*	—	0,0—2,5%
5—70 *мм*	—	79,0—87%
меньше 5 *мм*	—	13 —21%
Пыль и глина	—	5,62—6,82

Наличие пластинчатых и игловатых зерен весьма велико.

Размер фракций	100—70 *мм*	70—40 *мм*	40—20 *мм*	20—10 *мм*
Содержание пластинчатых и игловатых зерен, %	89,6	91,4	96,4	88,6

Выводы. Гравийный материал реки Шура-Озень не отвечает требованиям ГОСТа 8268—56.

Физико-механические свойства показаны в табл. 11, а гранулометрический состав — в табл. 12.

ЛИТЕРАТУРА

1. **К. Гюль и др.** Физическая география Дагестанской АССР, Дагиздат Махачкала —1959.
2. **Некрасов В. К.** Методы испытания каменных дорожно-строительных материалов. Дориздат, 1941.
3. **Голубятников В. Д.** Строительные материалы Дагестанской АССР. Сб. „Природные ресурсы Даг. АССР" т. I, 1935.
4. Вяжущие материалы, бетоны и заполнители для бетона. Сборник ГОСТов. Стандартгиз, 1958.
5. Строительные нормы и правила. Т. I. Строительные материалы, детали и конструкции. Гос. издательство литературы по строительству и архитектуре, 1955.
6. **Скрамтаев Б. Г. и др.** Строительные материалы. Стройиздат, 1954.
7. Классификация запасов месторождений твердых полезных ископаемых.
8. Инструкция по применению классификации запасов к месторождениям естественных каменных строительных материалов. ГКЗ при СМ СССР. Госгеологотехиздат, 1955.

А. А. Бабаев

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТЕРМОЭДС Cu_2Te

Термоэдс в магнитном поле как с теоретической, так и с экспериментальной стороны изучена слабо. Термоэдс в магнитном поле в зависимости от химического состава и от примесей почти не изучена. Нами была исследована термоэдс Cu_2Te в сильном магнитном поле 31000 эрстед.

В результате измерения установлено, что термоэдс Cu_2Te в магнитном поле уменьшается при средней температуре по Цельсию:

сред.	$\frac{\Delta\alpha}{\alpha_0}$ %	сред.	$\frac{\Delta\alpha}{\alpha_0}$ %
9,8	6,85	43,7	2,16
15,5	6,43	49,2	1,15
20,3	6,46	58,7	1,07
24,6	6,5	68,2	1,3
25,7	5,3	75,4	1,25
33,4	4,2	80,1	1,23

Б. И. Балтакс и Цян Пи-Хуан (ЖТФ, стр. 892, 1952 г. выпуск 4, том XXII), измеряя термоэдс очищенного теллура с примесью 1% Cu по весу при температуре 310°С, получили увеличение термоэдс на 70 мкв/град., т. е. добавление меди значителчно увеличивает коэффициент термоэдс исходного теллура, что, вероятно, связано с донорными свойствами меди в теллуре. Термоэдс в Cu_2Te по сравнению с термоэдс очищенного Te больше. По нашему мнению, медь Cu в теллуре Te создает донорные уровни, тем самым p — n переход изменяет концентрацию и подвижность носителей тока, и поэтому термоэдс в магнитном поле значительно уменьшается.

Измерения в большом температурном интервале и теоретические исследования продолжаются.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. **Б. А. Зейналов**. Решение матричного уравнения КХ=ХК в унимодулярных матрицах. 3
2. **А. Е. Сержанов**. Изображение алгебраических кривых при щелевой аэрофотосъёмке 9
3. **И. В. Ценов**. Интерполирование обобщенными полиномами . 19
4. **Н. Ф. Канунов**. Элементарный вывод условий эквивалентности двух кватернионных алгебр над полем рациональных функций . . . 25
5. **Б. П. Пашаев**. Тепловые и электрические свойства некоторых бронз. 31
6. **Б. П. Пашаев**. Примененне метода электрического нагрева для изучения свойств металлов при плавлении 39
7. **Ф. А. Коршак**. Панорамная щелевая аэрофотосъёмка 43
8. **Ф. А. Коршак**. Фотограмметрические работы, связанные с изучением ледового режима водных пространств 79
9. **М-Ш. И. Амирханов**. Строительные материалы Терско-Сулакской низменности ДАССР 111
10. Краткое сообщение 133

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ X

Редактор М. С. Бежаев. Технический редактор Дауров Х. М. Корректор Левчук В. Н.

Сдано в набор 6-IV-61 г. Подписано к печати 8-VI-62 г. Формат бумаги 60x92¹/₁₆. Печат. листов 8,5. Учетно-изд. листов 8,4. Заказ № 872. Тираж 500. С 00874. Цена 30 коп.

Дагестанский Государственный Университет им. В. И. Ленина
г. Махачкала, ул. Дзержинского, 12.

Республиканская книжная типография, г. Орджоникидзе, ул. Джанаева, 20.

Цена 30 коп.